LUCIAN L. TURDEANU

FOTOGRAMMETRIE ANALITICĂ

EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE

Scanned with OKEN Scanner

LUCIAN L. TURDEANU

FOTOGRAMMETRIE ANALITICĂ

EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE
București, 1997

Scanned with OKEN Scanner

Analytical Photogrammetry

Photogrammétrie Analytique

© 1997, Editura Academiei Române
Toate drepturile asupra acestei
ediţii sunt rezervate editurii

ISBN 973-27-0613-9

EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE
Bucureşti, R-76117, Calea 13 Septembrie nr.13, Sector 5

Scanned with OKEN Scanner

PREFAŢĂ

Într-o singură viaţă de om (este adevărat, cu condiţia ca această viaţă să fie comparativ lungă şi destul de activă) s-a putut participa direct la cele 3 tipuri de fotogrammetrie, denumite azi convenţional: analogică, analitică şi digitală (numerică); aceste denumiri sunt discutabile şi ele au apărut pe măsura evoluţiei-dezvoltărilor. Totodată, se poate remarca trecerea la o aparatură relativ mai simplă din punct de vedere optico-mecanic, cu mărirea ponderii de tehnică electronică şi de informatică.

Trebuie menţionat că de fapt, actualmente, se poate trece uşor de la analogic (de exemplu, de la imaginea fotografică) la digital şi invers, putându-se face prelucrări analogice, hibride sau digitale, fără pierderi notabile de informaţie geometrică sau radiometrică. Ar fi de preferat să fie folosite în mod judicios, fără a le absolutiza, respectiv a le exclude pe unele în detrimentul celorlalte.

De fapt, fotogrammetria, ca şi teledetecţia, implică măsurători (geometrice şi radiometrice) nu direct asupra obiectelor şi fenomenelor, ci indirect, fără contact cu aceste obiecte-fenomene. Pe de altă parte, trebuie subliniat că teledetecţia şi implicit fotogrammetria îşi datorează dezvoltarea deosebită, din ultima perioadă, participării efective şi eficiente la programele spaţiale.

În sensul celor menţionate, putem poziţiona fotogrammetria analitică, ce constituie obiectul lucrării de faţă, într-un context mai larg, în ansamblul pluri, inter- şi chiar transdisciplinar, dacă luăm în considerare şi implicaţiile deosebit de diverse, legate de aplicaţiile din domeniile nu numai cartografic-topografice, ci în special tematice, privind inventarierea, urmărirea şi controlul fenomenelor/obiectelor lent, mediu sau rapid variabile în timp, pornind de la resursele geologice la vegetaţia naturală şi respectiv cultivată, până la energia valurilor, seismologie, dezastre naturale sau antropice.

Scanned with OKEN Scanner

În consecință, lucrarea de față poate fi de un real folos atât celor ce activează în domeniul fotogrammetriei-teledetecției, cât și pentru o largă gamă de specialiști din rândul utilizatorilor. Publicând această carte, Editura Academiei împlinește un act de cultură pentru promovarea și dezvoltarea științifică și tehnologică din țara noastră.

5 februarie 1996

Prof.dr.ing. Nicolaie Oprescu
Membru al consiliului științific al
Agenției Spațiale Române
Director al Proiectelor de teledetecție

Scanned with OKEN Scanner

CUVÂNT ÎNAINTE

Fotogrammetria analitică este o ramură relativ nouă a fotogrammetriei, care a început să prezinte interes practic abia în ultimele decenii, în strânsă legătură cu dezvoltarea calculatoarelor electronice numerice. Caracteristica sa de bază constă în rezolvarea principalelor probleme fotogrammetrice pe cale numerică. Trebuie precizat că lucrarea de faţă se referă strict la acest mod de abordare a fotogrammetriei. Prin urmare, cititorul va trebui să fie familiarizat cu noţiunile de bază ale fotogrammetriei, precum şi ale disciplinelor matematice la care se face referire în anexe. De asemenea, trebuie subliniat faptul că dezvoltările matematice (amănunţite) sunt completate cu recomandări algoritmice, imprimând lucrării pe lângă caracterul teoretic un pronunţat caracter aplicativ.

Ţinând seama de toate aceste aspecte, se poate remarca faptul că lucrarea se adresează îndeosebi cercetătorilor şi specialiştilor din domeniul fotogrammetriei-teledetecţiei, dar şi tuturor celor care vor să studieze temeinic această disciplină (mai ales studenţilor de la secţiile de geodezie şi de cadastru). De asemenea, având în vedere continua lărgire a sferei de aplicare a fotogrammetriei-teledetecţiei atât în domeniul topografic, cât şi în diversele domenii netopografice, cartea va fi deosebit de utilă şi specialiştilor din aceste domenii.

În sfârşit, ţin să aduc mulţumiri domnului prof. dr. ing. Nicolaie Oprescu, cel ce mi-a orientat întreaga activitate didactică şi de cercetare, finalizată prin această carte. Mulţumesc de asemenea colegilor conf. dr. ing. Florea Zăvoianu şi asist. ing. Cătălin Nedelcu pentru sugestiile şi sprijinul ce mi le-au acordat la realizarea acestei lucrări.

În mod deosebit, aduc mulţumiri domnului ing. Dan Gheorghiu, directorul Institutului de Geodezie, Fotogrammetrie, Cartografie şi Organizarea Teritoriului, fără ajutorul căruia nu ar fi putut apărea această carte.

Autorul

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

PREFAŢĂ 5

CUVÂNT ÎNAINTE 7

1. INTRODUCERE 13

1.1. Consideraţii generale 13
1.1.1. Definiţii 13
1.1.2. Scurt istoric 13
1.2. Aspecte principiale de bază 15
1.2.1. Principii generale 15
1.2.2. Problema generală şi problemele de bază ale fotogrammetriei analitice 16
1.2.3. Orientarea fotogramelor 19
1.3. Definirea simbolurilor utilizate 22

2. ORIENTAREA INTERIOARĂ 26

2.1. Sistemul de coordonate al fotogramei 26
2.2. Reducerea coordonatelor măsurate la punctul principal 28
2.3. Corectarea erorilor instrumentale 30
2.4. Corectarea deformării suportului emulsiei 34
2.5. Corectarea distorsiunii obiectivului 39
2.6. Corectarea influenţei refracţiei atmosferice 42
2.7. Corectarea influenţei curburii Pământului 43
2.8. Corectarea influenţei reliefului 45

3. ORIENTAREA EXTERIOARĂ A UNEI FOTOGRAME 47

3.1. Condiţia de coliniaritate 47
3.2. Forme particulare ale ecuaţiilor condiţiei de coliniaritate 51
3.3. Forma diferenţială a ecuaţiilor condiţiei de coliniaritate 53
3.4. Exploatarea independentă a fotogramelor aeriene 58

4. ORIENTAREA EXTERIOARĂ A PERECHILOR DE FOTOGRAME 69

4.1. Orientarea relativă 69
4.1.1. Condiţia de coplanaritate 71
4.1.2. Forma liniarizată a ecuaţiei condiţiei de coplanaritate 73
4.1.3. Orientarea relativă în serie 75

Scanned with OKEN Scanner

4.1.4. Orientarea relativă independentă 83
4.2. Formarea stereomodelului numeric 87
4.2.1. Calculul coordonatelor-model pentru o stereogramă 87
4.2.2. Calculul coordonatelor-model în cazul tripletelor 91
4.2.3. Deformaţiile stereomodelului 93
4.3. Orientarea absolută a stereomodelului 97
4.3.1. Relaţii matematice de bază 97
4.3.2. Determinarea valorilor aproximative ale parametrilor de orientare 102
4.3.3. Compensarea orientării absolute 105
4.3.4. Determinarea coordonatelor-teren ale detaliilor topografice 108

5. ORIENTAREA EXTERIOARĂ A FOTOGRAMELOR TERESTRE....111

5.1. Consideraţii generale 111
5.2. Relaţii de bază 113
5.3. Precizia de determinare a coordonatelor-teren 118
5.4. Tratarea riguroasă 120

6. AEROTRIANGULAŢIA ANALITICĂ....126

6.1. Introducere. Definiţii. Clasificări 126
6.2. Aerotriangulaţia pe benzi 128
6.2.1. Conexiunea modelelor analitice orientate în serie 129
6.2.2. Conexiunea modelelor analitice orientate independent 133
6.2.3. Conexiunea modelelor analogice independente 136
6.2.4. Compensarea benzilor de aerotriangulaţie 138
6.3. Compensarea aerotriangulaţiei în bloc 142
6.3.1. Compensarea în bloc cu benzi 142
6.3.2. Compensarea în bloc cu modele independente 145
6.3.3. Compensarea în bloc cu fascicule fotogrammetrice 161
6.4. Cazuri speciale de aerotriangulaţie 178
6.4.1. Compensarea simultană a observaţiilor fotogrammetrice şi geodezice 178
6.4.2. Utilizarea GPS în aerotriangulaţie 187
6.4.3. Compensarea aerotriangulaţiei în cazul terenurilor plane 194
6.4.4. Aerotriangulaţia prin metoda incluziunii 198
6.5. Precizia aerotriangulaţiei 201

7. APARATE UTILIZATE LA EXPLOATAREA ANALITICĂ A FOTOGRAMELOR....206

7.1. Aparate de marcare şi transpunere a punctelor 207
7.2. Aparate de măsurare fotogrammetrică 209
7.2.1. Monocomparatoare 209
7.2.2. Stereocomparatoare 211
7.2.3. Măsurarea coordonatelor la aparate analogice 216
7.3. Sistemul interactiv de exploatare analitică 219
7.4. Aparate de stereorestituţie analitică 220

Scanned with OKEN Scanner

ANEXA A - ELEMENTE DE GEOMETRIE ANALITICĂ ŞI PROIECTIVĂ 226
A.1. Sisteme de coordonate 226
A.2. Transformări de coordonate 227
A.2.1. Transformări de coordonate în plan 227
A.2.2. Transformări de coordonate în spaţiul tridimensional 232
A.3. Proprietăţi, relaţii şi teoreme fundamentale din geometria proiectivă utilizate în fotogrammetrie 247
A.3.1. Corespondenţa proiectivă între forme de ordinul I 248
A.3.2. Corespondenţa proiectivă între forme de ordinul II 257
A.3.3. Corespondenţa proiectivă între forme de ordinul III 260
A.3.4. Transformarea prin inversiune 261

ANEXA B - ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ ŞI ANALIZĂ MATRICEALĂ 264
B.1. Matrice 264
B.1.1. Definiţii, cazuri particulare şi proprietăţi generale 264
B.1.2. Operaţii cu matrice 266
B.1.3. Matricea inversă 269
B.1.4. Rangul unei matrice. Transformări elementare 271
B.1.5. Diferenţierea matricelor 271
B.2. Determinanţi 273
B.2.1. Definiţii 273
B.2.2. Calculul determinanţilor 274
B.2.3. Proprietăţile determinanţilor 275
B.2.4. Diferenţierea determinanţilor 275
B.3. Sisteme de ecuaţii liniare 277
B.3.1. Consideraţii generale 277
B.3.2. Condiţionarea matricelor 279
B.3.3. Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare 280

ANEXA C - ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂŢILOR, STATISTICĂ MATEMATICĂ ŞI METODA PĂTRATELOR MINIME 295
C.1. Erori de măsurare, indicatori statistici, propagarea erorilor 295
C.1.1. Clasificarea măsurătorilor 295
C.1.2. Tipuri de erori de măsurare 296
C.1.3. Evaluarea statistică a măsurătorilor directe 297
C.1.4. Legea propagării erorilor 300
C.1.5. Variabile aleatoare discrete 301
C.1.6. Variabile aleatoare continue 304
C.1.7. Repartiţii utilizate la studiul erorilor 306
C.2. Compensarea măsurătorilor prin metoda pătratelor minime 312
C.2.1. Principii de bază 312

Scanned with OKEN Scanner

C.2.2. Compensarea măsurătorilor indirecte 314
C.2.3. Compensarea măsurătorilor condiționate 320
C.2.4. Compensarea măsurătorilor indirecte cu constrângeri 325
C.2.5. Compensarea măsurătorilor condiționate cu parametri necunoscuți 329
C.2.6. Modalități de îmbunătățire a soluției după compensare 332
C.2.7. Reprezentarea preciziei rezultatelor compensării, prin elipsa și elipsoidul erorilor 334

BIBLIOGRAFIE 338

INDEX ALFABETIC 341

ABSTRACT 347

CONTENTS 349

RÉSUMÉ 353

SOMMAIRE 355

Scanned with OKEN Scanner

1. INTRODUCERE

1.1. Consideraţii generale

1.1.1. DEFINIŢII

Fotogrammetria este stiinţa care se ocupă cu determinarea formei, dimensiunilor şi poziţiei unor obiecte din spaţiu pe baza imaginilor fotografice ale acestora. Denumirea de " fotogrammetrie " provine din cuvintele greceşti **photos** (lumină), **gramma** (înregistrare) şi **metron** (a măsura). Într-o accepţiune mai largă, se poate aprecia că fotogrammetria urmăreşte obţinerea de informaţii precise privind obiectele fizice şi mediul ambiant prin înregistrarea, măsurarea şi interpretarea imaginilor. Prin urmare, după cum se poate remarca, aici sunt incluse două aspecte: cantitativ (sau metric) şi calitativ (referitor la interpretarea imaginilor).

Fotogrammetria se poate clasifica în diverse moduri şi după diferite criterii. Dacă se are în vedere modul de rezolvare a problemelor fotogrammetrice, se poate defini **fotogrammetria analitică** prin caracteristica sa fundamentală: obţinerea soluţiilor prin metode matematice. În consecinţă, ne vom ocupa în continuare doar de măsurarea şi de prelucrarea datelor fotogrammetrice, adică de aspectul cantitativ al fotogrammetriei.

1.1.2. SCURT ISTORIC

Apariţia fotogrammetriei poate fi considerată în strânsă legătură cu descoperirea legilor perspectivei şi utilizarea lor în pictură. Primul care a folosit imaginile perspective în scopuri topografice a fost elveţianul M.A.Kappeler (în 1726), iar I.H.Lambert, în cartea **Perspectiva liberă** (Zürich, 1759) prezintă soluţii geometrice privind problema reconstituirii perspectivei centrale. Acestea reprezentau însă doar elementele pregătitoare, momentul hotărâtor fiind marcat de

Scanned with OKEN Scanner

inventarea fotografiei în 1839. Prima cameră fotografică metrică a fost construită în 1851 de francezul A.Laussedat, care a elaborat şi un procedeu de ridicare fotogrammetrică (metrofotografie). În anul 1858 a fost executată prima fotografie dintr-un balon, iar în 1909 prima fotografie din avion.

La începutul secolului nostru, în 1901, C.Pulfrich construieşte aparatul de bază al fotogrammetriei analitice, stereocomparatorul, al cărui principiu este utilizat şi azi la aparatele moderne de tip comparator.

Evoluţia ulterioară a fotogrammetriei a fost marcată de realizarea unor aparate de exploatare fotogrammetrică de tip analog şi elaborarea unor metode adecvate de exploatare fotogrammetrică. Un aport deosebit au avut în acest sens E.v.Orel, M.Gasser, Th.Scheimpflug, W.Bauersfeld, U.Nistri, R.Hugershoff, E.Santoni, H.Wild, M.Zeller, W.K.Bachmann, A.J.Branderberger, H.Kasper, G.Poivilliers, O.v.Gruber, S.Finsterwalder. Ultimul menţionat are totodată merite deosebite în fundamentarea principiilor fotogrammetriei analitice (printr-o serie de lucrări elaborate între 1899 şi 1932). În S.U.A., o contribuţie importantă la dezvoltarea metodelor numerice a avut E.Church (în perioada 1930-1948), iar apoi, în perioada postbelică, E.Merritt, H.Schmid, D.Brown, J.Case, M.Keller, G.C.Terwinkel. În Canada, o activitate deosebit de semnificativă în domeniul fotogrammetriei analitice au desfăşurat G.H.Schut (la sfârşitul deceniului al şaselea) şi U.V.Helava. Se pot menţiona de asemenea contribuţiile lui E.H.Thompson (în Anglia), K.Rinner (în Austria), F.Ackermann şi G.Konecny (în Germania), U.Bartorelli şi G.Inghilleri (în Italia), B.Hallert (în Suedia), A.N.Lobanov (în Rusia) şi, desigur, lista ar putea fi mult mai lungă.

În ţara noastră, primele încercări de folosire a fotografiilor terestre pentru întocmirea unor crochiuri topografice au fost efectuate în timpul războiului de independenţă din 1877. În 1889 sunt obţinute primele fotografii din balon de către Văitoianu, iar în anul 1911, primele fotografii din avion de către Aurel Vlaicu. În perioada primului război mondial, s-au executat fotografii aeriene în scopuri de recunoaştere. În anul 1924 a fost creat un serviciu de cadastru pe lângă Direcţia aviaţiei civile, care a folosit pentru prima dată în ţara noastră fotogrammetria în lucrări de măsurători terestre. De asemenea, în perioada interbelică au fost elaborate câteva lucrări ştiinţifice importante în acest domeniu, având ca autori pe C.Gonta, Gh.Iacobescu, I.G.Vidraşcu, V.Ivănceanu, A.Marin, Gh.V.Nicolau-Bârlad ş.a. Ultimul menţionat se remarcă printr-o lucrare de referinţă privind dezvoltarea metodelor numerice: **Fotogrametria matematică** (1945).

Scanned with OKEN Scanner

1.2. Aspecte principiale de bază

1.2.1. PRINCIPII GENERALE

Trebuie remarcat de la început că principiile fotogrammetriei analitice sunt cunoscute de mult, dar dezvoltările matematice au rămas fără aplicabilitate practică atâta timp cât mijloacele de calcul erau rudimentare. Este edificatoare părerea lui Gruber că **"cine calculează mult, gândeşte puţin"**, evident valabilă în condiţiile menţionate. În consecinţă, metodele analitice au început să devină eficiente şi au pornit pe un drum ascendent, odată cu dezvoltarea calculatoarelor electronice numerice, fiind operaţionale din deceniul al şaptelea şi ajungând azi la performanţe cu totul remarcabile.

Deşi, după cum s-a menţionat anterior, principalele probleme fotogrammetrice erau deja abordate şi dezvoltate matematic, tratarea era preponderent geometrică şi într-o manieră în general improprie calculului numeric. De aceea, a fost necesară reluarea acestor probleme, elaborându-se într-o perioadă destul de scurtă numeroase metode de rezolvare practică a acestora. În cele din urmă, dintre aceste metode s-au impus tratările matriceale, sugestive din punct de vedere principial şi practice din punct de vedere numeric. Aceasta va fi şi maniera de abordare a problemelor fotogrammetrice de bază în această lucrare, evitându-se (în general) prezentarea mai multor variante de rezolvare a aceleiaşi probleme şi imprimându-i astfel un caracter unitar.

În ultima perioadă, fotogrammetria analitică s-a impus evident (în raport cu metodele clasice, folosind aparatura de tip analogic), dovedindu-şi din plin eficienţa. Metodele analitice permit o mai uşoară corectare a erorilor sistematice, utilizarea unor date auxiliare, precum şi o compensare numerică riguroasă. De asemenea, prezintă avantaje certe în legătură cu numeroasele aplicaţii netopografice ale fotogrammetriei.

În principiu, **exploatarea fotogrammetrică analitică** implică 3 mari etape:

1) **culegerea şi înregistrarea datelor;**
2) **prelucrarea (şi analiza) datelor;**
3) **reprezentarea rezultatelor.**

Prima etapă include preluarea imaginilor, măsurarea la un aparat de tip comparator, precum şi determinări în teren pentru punctele de sprijin.

În cea de-a doua etapă, datele sunt prelucrate la un calculator electronic numeric (pe baza unui program).

Scanned with OKEN Scanner

În sfârşit, în etapa a treia, rezultatele sunt reprezentate sub formă grafică (de exemplu la o masă trasantă), sau sub formă numerică.

Trebuie remarcat faptul că în cazul exploatării analitice, aparatura fotogrammetrică (de tip comparator) este mult mai simplă (şi evident mai ieftină) decât cea de tip analogic folosită la exploatarea clasică. De asemenea, un calculator performant nu mai reprezintă azi o problemă, iar o masă trasantă cu numeroase facilităţi este de asemenea accesibilă.

Pe de altă parte, se poate sublinia faptul că (spre deosebire de metodele clasice) exploatarea analitică este o **exploatare punct cu punct**, ca în topografie, dar mult mai eficientă decât aceasta, când numărul de puncte este mare.

În fine, trebuie amintit că exploatarea fotogrammetrică se realizează în mod diferit, în două situaţii distincte:

- în cazul terenurilor plane, exploatarea se face fotogramă cu fotogramă (independent), utilizând **metoda redresării fotogrammetrice;**
- în cazul terenurilor accidentate se folosesc perechi de fotograme, cu ajutorul cărora se formează modelul stereoscopic corespunzător zonei de dublă acoperire a acestora şi care se exploatează prin **metoda stereorestituţiei.**

1.2.2. PROBLEMA GENERALĂ ŞI PROBLEMELE DE BAZĂ ALE FOTOGRAMMETRIEI ANALITICE

După cum se va putea observa în continuare, problemele fotogrammetriei analitice sunt destul de diverse, dar (în majoritatea lor) se pot încadra într-o problemă generală care se poate exprima prin relaţia funcţională:

$$X = f(O,x) \tag{1.1}$$

unde, X reprezintă coordonatele unui punct în spaţiul-obiect, x - coordonatele-imagine corespunzătoare, iar O cuprinde parametrii de orientare.

Rezolvarea acestei probleme se face în două etape:

1 - cunoscând X şi x pentru un anumit număr de puncte, se determină parametrii de orientare O;

2 - cunoscând parametrii O şi coordonatele x pentru un număr (oricât de mare) de puncte se determină coordonatele X ale acestor puncte.

Deoarece relaţia (1.1) este în general neliniară, ea va trebui liniarizată şi prin urmare aproximată, ceea ce va conduce la un proces iterativ pentru rezolvarea primei etape. Faţă de această etapă, implicând rezolvarea succesivă a unor sisteme de ecuaţii liniare, cea de a doua este mult mai simplă, constând în calculul coordonatelor X pe baza relaţiei (1.1) în forma iniţială (neliniarizată), cunoscând acum toate elementele din membrul drept.

Scanned with OKEN Scanner

Trebuie remarcat că în forma prezentată, relaţia (1.1) corespunde exact doar problemei orientării exterioare independente a fotogramelor. Dacă ne referim la orientarea absolută a stereomodelului, x va reprezenta vectorul coordonatelor-model. Aceeaşi interpretare o va avea x la conexiunea modelelor în cadrul aerotriangulaţiei pe benzi, unde (în plus) X va fi vectorul coordonatelor în sistemul benzii. Aceeaşi relaţie (1.1) este aplicabilă şi altor situaţii, ca de exemplu la corectarea coordonatelor-imagine, unde X şi x reprezintă coordonatele calibrate şi respectiv cele măsurate ale indicilor de referinţă, iar O include parametrii transformării afine. Toate acestea confirmă gradul de generalitate a relaţiei (1.1).

Pe de altă parte, având în vedere diversitatea problemelor fotogrammetriei analitice, se poate remarca totuşi că ele se pot reduce în esenţă la câteva probleme de bază şi anume:

- **retrointersecţia spaţială** (orientarea exterioară independentă a fotogramelor);
- **orientarea relativă** (independentă sau în serie);
- **orientarea absolută** a stereomodelului;
- **intersecţia spaţială** (pe baza cunoaşterii parametrilor de orientare).

După cum se poate observa în tabelul 1.1, fiecare problemă este descrisă printr-o anumită ecuaţie şi se caracterizează prin anumite mărimi măsurate, prin anumiţi parametri cunoscuţi şi îndeosebi prin anumiţi parametri necunoscuţi.

În fotogrammetria analitică se consideră în general ca observaţii (mărimi măsurate), coordonatele-imagine. Se pot trata însă şi coordonatele-teren ale punctelor de sprijin ca observaţii (îndeosebi în cazul exploatării la scări mari), deşi în majoritatea dezvoltărilor clasice acestea sunt considerate ca lipsite de erori. Referitor la parametrii cunoscuţi, se poate remarca faptul că marea majoritate a metodelor analitice consideră cunoscute elementele de orientare interioară. Trebuie menţionat însă că au fost dezvoltate şi procedee care fac abstracţie de aceste elemente, bazându-se pe relaţiile de corespondenţă proiectivă. În fine, parametrii necunoscuţi ai fiecărei probleme şi ecuaţiile cu ajutorul cărora se pot determina caracterizează în esenţă problema respectivă şi vor face obiectul tratărilor ulterioare. Desigur, fotogrammetria analitică are de rezolvat şi probleme mai complexe (ca de exemplu aerotriangulaţia) în cadrul cărora se vor regăsi însă aceste probleme de bază.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.1.

Problemele de bază ale fotogrammetriei analitice

Problema	Ecuaţia	Mărimi măsurate	Parametri cunoscuţi	Parametri necunoscuţi
Retrointersecţia spaţială	Coliniaritate	x'_j , y'_j (coordonate-imagine)	x_P , y_P , f X_i , Y_i , Z_i (coordonate-teren ale punctelor de sprijin)	X_o , Y_o , Z_o ω , φ , κ
Orientarea relativă independentă	Coplanaritate	x'_j , y'_j x''_j , y''_j	x_P , y_P , f b_x , b_y , b_z ω'	φ' , κ' ω'' , φ'' , κ''
Orientarea relativă în serie	Coplanaritate	x'_j , y'_j x''_j , y''_j	x_P , y_P , f b_x ω', φ', κ'	b_y , b_z ω'', φ'', κ''
Orientarea absolută	Transformarea conformă spaţială	x_j , y_j , z_j (coordonate-model)	X_i , Y_i , Z_i (coordonate-teren ale punctelor de sprijin)	X_o , Y_o , Z_o m Ω , Φ , K
Intersecţia spaţială	Coliniaritate	x'_j , y'_j x''_j , y''_j	x_P , y_P , f X'_o , Y'_o , Z'_o ω', φ' , κ' X''_o , Y''_o , Z''_o ω'', φ'' , κ''	X_j , Y_j , Z_j (coordonate-teren)

Scanned with OKEN Scanner

1.2.3. ORIENTAREA FOTOGRAMELOR

Pentru a putea utiliza fotogramele în scopuri de măsurare, este necesară orientarea acestora în raport cu obiectul fotografiat, care va putea fi astfel reconstituit şi reprezentat sub formă grafică sau numerică. Având în vedere că în fotogrammetria analitică reconstituirea fasciculului de la preluare nu reprezintă o problemă prea complicată şi constituie cazul curent de exploatare fotogrammetrică, în continuare se va face referire doar la această situaţie. Prin urmare, în procesul de orientare se va urmări reconstituirea poziţiei pe care a avut-o fiecare fotogramă în momentul preluării.

O fotogramă poate fi considerată ca o înregistrare (pe film - de ex.) a unui fascicul de raze provenind din spaţiul-obiect. Prin urmare, din punct de vedere geometric, fotograma este o perspectivă centrală.

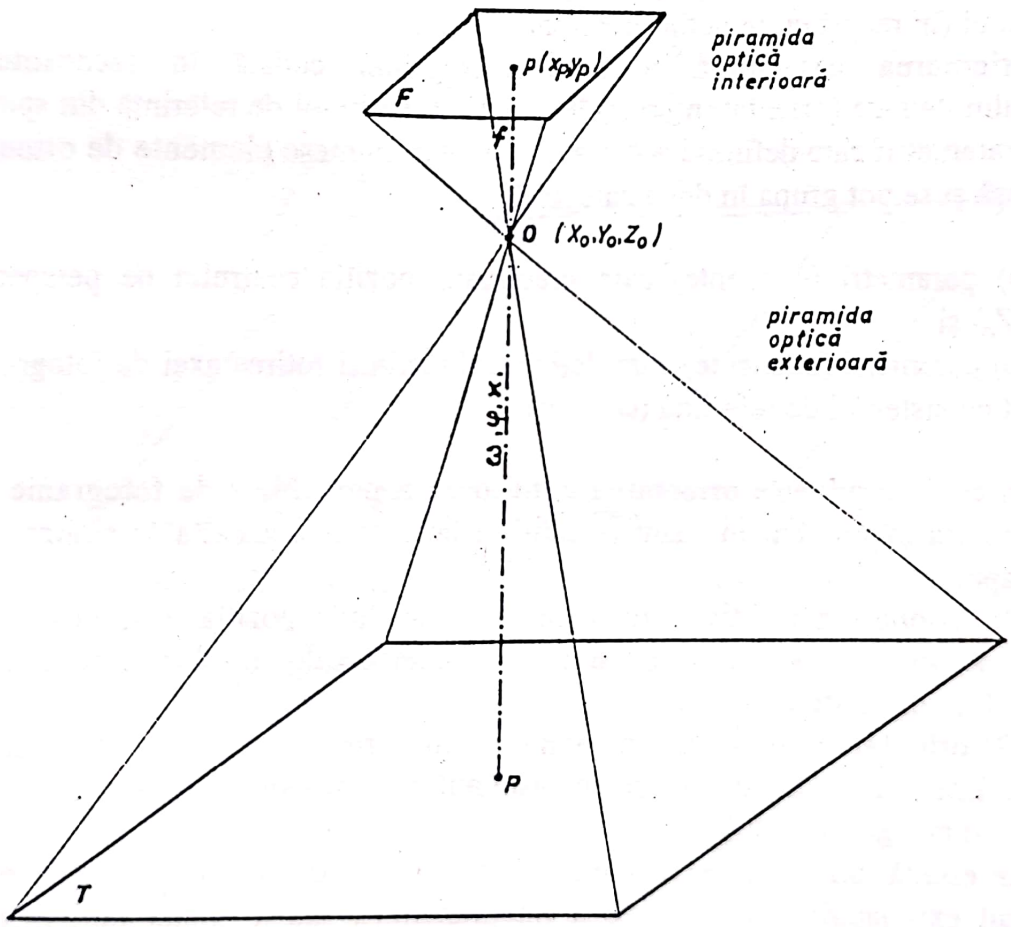

Figura 1.1. Elementele de orientare ale unei fotograme.

În fotogrammetria analitică, traseul fiecărei raze poate fi descris printr-o expresie matematică în funcţie de poziţia punctului în spaţiul-obiect, poziţia imaginii sale pe fotogramă, poziţia centrului de perspectivă (în sistemul de

coordonate din teren), direcţia axei optice a camerei de preluare, rotirea în planul imaginii şi caracteristicile geometrice ale imaginii în interiorul camerei. Toate aceste elemente prin care se realizează legatura dintre poziţia unui punct din spaţiul-obiect şi poziţia punctului corespunzător din spaţiul-imagine se numesc **elemente de orientare.** Ele sunt reprezentate sugestiv în figura 1.1 şi se pot grupa în elemente de orientare interioară şi elemente de orientare exterioară.

Orientarea interioară constă în reconstituirea fasciculului de raze din interiorul camerei, de la preluarea imaginii. Parametrii care definesc această orientare poartă denumirea de **elemente de orientare interioară** şi sunt:

(1) constanta camerei (sau, distanţa principală) care este egală în principiu cu distanţa focală calibrată *f*;

(2) poziţia punctului principal, exprimată prin coordonatele x_p ,y_p (în raport cu sistemul definit de indicii de referinţă);

(3) parametrii care exprimă caracteristicile geometrice ale distorsiunii obiectivului (în raport cu punctul principal).

Orientarea exterioară a unei fotograme constă în reconstituirea fasciculului de raze (orientat interior) în raport cu sistemul de referinţă din spaţiul-obiect. Parametrii care definesc această orientare se numesc **elemente de orientare exterioară** şi se pot grupa în două categorii:

(a) parametri (elemente) care precizează poziţia centrului de perspectivă (X_o,Y_o,Z_o) şi

(b) parametri (elemente) care definesc direcţia şi rotirea axei de fotografiere în raport cu sistemul de referinţă (ω, φ, κ).

În ceea ce priveşte **orientarea exterioară a perechilor de fotograme** (fig. 1.2) necesară exploatării în cazul terenurilor accidentate, aceasta se realizează în două etape:

(1) **orientarea relativă** prin care se reconstituie poziţia reciprocă a celor două fascicule (respectiv fotograme), la intersecţiile razelor corespondente rezultând modelul stereoscopic şi

(2) **orientarea absolută** a stereomodelului prin aducerea în scară, rotirea şi orizontalizarea acestuia în raport cu sistemul de coordonate al spaţiului-obiect (incluzând aici şi translaţiile).

În esenţă, orientarea exterioară constă în rezolvarea retrointersecţiei spaţiale (în cazul exploatării independente a fotogramelor), sau a dublei retrointersecţii spaţiale (în cazul exploatării stereofotogrammetrice).

Determinarea elementelor de orientare exterioară reprezintă o problemă fundamentală în aerofotogrammetrie şi poate fi rezolvată în mod indirect cu ajutorul unui anumit număr de puncte de sprijin (de reper) din teren, având imaginile clare şi îndeplinind câteva condiţii de bază. Folosirea aşa-numitelor **date**

Scanned with OKEN Scanner

auxiliare (indicațiile statoscopice, ale camerei orizont, ale nivelei sferice etc.) nu a dus la rezultate satisfăcătoare pentru cazurile curente de exploatare fotogrammetrică. În ultimul timp, prin utilizarea **GPS** (Global Positioning System), unele elemente de orientare exterioară, și anume coordonatele fiecărui centru de perspectivă, se pot determina cu o precizie destul de bună.

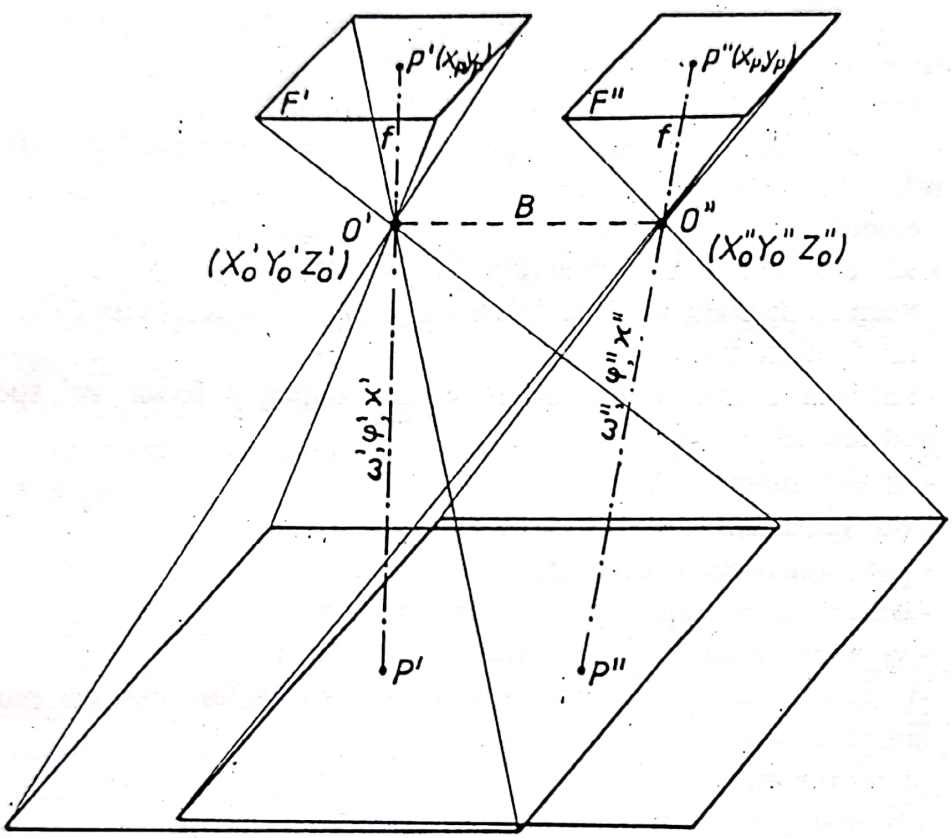

Figura1.2. Elementele de orientare ale unei perechi de fotograme.

În cazul fotogrammetriei terestre se pot determina însă direct și precis toate elementele de orientare exterioară, chiar la preluarea fotogramelor, prin metode geodezice.

Principalele probleme pe care le implică exploatarea analitică a fotogramelor, și în primul rând orientarea acestora, vor fi dezvoltate în continuare.

Scanned with OKEN Scanner

1.3. Definirea simbolurilor utilizate

a - semiaxa mare a elipsei erorilor; distanţa transversală dintre punctele caracteristice ale stereomodelului; indice superior ce face referire la sistemul de coordonate al aparatului;

$a_o, a_1, \ldots$ - parametrii diferitelor formule de transformare;

a_x, a_y - distanţa longitudinală şi respectiv cea transversală dintre indicii de referinţă ai unei fotograme;

a_{ij} - elementele matricei A;

$\mathbf{a}$ - vectorul de poziţie al punctului-imagine m;

$\mathbf{a}', \mathbf{a}''$ - vectorii de poziţie ai imaginilor conjugate m' şi respectiv m'';

$|a|$ - modulul mărimii a;

A -matricea coeficienţilor observaţiilor; indice inferior ce specifică o matrice antisimetrică;

A^{-1} - inversa matricei A;

A^T - transpusa matricei A;

A^+ - pseudoinversa matricei A;

A_{ij} - complementii algebrici ai elementelor matricei A;

$\mathbf{A}$ - vectorul de poziţie al unui punct M din teren;

$\mathbf{A}', \mathbf{A}''$ -vectorii celor două raze conjugate, care determină un punct m al stereomodelului;

$|A|$ - determinantul matricei A;

b - baza de proiecţie; semiaxa mică a elipsei erorilor;

$b_o, b_1, \ldots$ - parametrii diferitelor formule de transformare;

b_x, b_y, b_z - componentele bazei de proiecţie;

$\mathbf{b}$ - vectorul bazei de proiecţie;

B - baza de fotografiere; matricea coeficienţilor necunoscutelor;

$\dot{B}$ - matricea coeficienţilor parametrilor de orientare;

$\ddot{B}$ - matricea coeficienţilor coordonatelor necunoscute ale punctelor din spaţiul-obiect;

c - constanta camerei; indice superior ce specifică valori calculate;

$c_o, c_1, \ldots$ - parametrii diferitelor formule de transformare;

C - matricea coeficienţilor ecuaţiilor de constrângeri;

d - urmat de simbolul unei mărimi reprezintă valoarea diferenţială a acelei mărimi;

$d_o, d_1, \ldots$ - parametrii diferitelor formule de transformare;

D - determinant; distanţa în spaţiul-obiect;

Scanned with OKEN Scanner

f - distanța focală; funcție;
F - funcție; fotogramă;
F', F'' - cele două fotograme conjugate;
g - indice inferior făcând referire la centrul de greutate pe fotogramă sau în model;
G -matricea coeficienților ecuațiilor observațiilor geodezice; indice inferior făcând referire la centrul de greutate în teren;
h - distanța (înălțimea) de proiecție;
H - înălțimea relativă de zbor;
i - indice superior specificând iterația; indice inferior făcând referire la un punct de sprijin (de reper), sau la un punct oarecare pe fotogramă;
I - matricea unitate;
j - indice inferior referitor la un punct de aerotriangulație;
J - determinantul funcțional (jacobian);
k - indice superior specificând fotograma, stereomodelul sau banda; constantă;
K - vectorul corelatelor; modulul inversiunii; constantă;
l - vectorul termenilor liberi; indice superior ce specifică modelul sau fotograma;
l_i - valorile măsurate ale unei mărimi L;
L - vectorul termenilor liberi (în cazul măsurătorilor indirecte);
$\overline{L}$ - valoarea cea mai probabilă a unei mărimi L;
m - factor de scară (cu indicele corespunzător pentru scara fotogramei (m_f), scara planului (m_p) etc.); eroarea medie pătratică (abaterea standard), eventual cu indici corespunzători diferitelor mărimi; punct pe fotogramă (imaginea unui punct M din teren); punct în stereomodel; numărul liniilor unei matrice; coeficient unghiular (al unei drepte); numărul unităților de compensare (modele, fotograme) dintr-un bloc; indice superior ce specifică o mărime măsurată; indice inferior făcând referire la o valoare medie;
m', m'' - puncte-imagine conjugate;
M - mărime măsurată direct; punct în spațiul-obiect;
n - punctul nadiral pe fotogramă; numărul coloanelor unei matrice; număr de puncte (cu indice inferior va avea semnificația particulară corespunzătoare);
n_f, n_b - numărul fotogramelor dintr-o bandă, respectiv numărul benzilor dintr-un bloc;
N - matricea coeficienților ecuațiilor normale; punctul nadiral pe teren;
$\dot{N}$ - submatricea coeficienților elementelor de orientare exterioară;
$\ddot{N}$ - submatricea coeficienților coordonatelor-teren necunoscute;
$\hat{N}$ - matricea coeficienților ecuațiilor normale reduse;

o - punctul mijlociu al fotogramei;
O - originea sistemului de coordonate; centrul de perspectivă al unei fotograme (eventualii indici precizează centrele de perspectivă ale fotogramelor succesive); notaţie globală pentru parametrii de orientare; matrice cu toate elementele egale cu zero; centrul (polul) inversiunii;
p - punctul principal al fotogramei; paralaxa longitudinală; ponderea unei mărimi (cu indicele corespunzător); lăţimea benzii unei matrice (de tip bandă);
P - matricea ponderilor; corespondentul punctului principal în teren; polinom;
P_n - permutări de n elemente;
$P(A)$ - probabilitatea unui eveniment A;
q - paralaxa transversală;
q_{ij} - elementele matricei Q;
Q - inversa matricei sistemului de ecuaţii normale (N^{-1});
r - distanţa radială pe fotogramă; redundanţa (numărul de ecuaţii suplimentare); rangul unei matrice;
r_{ij} - elementele matricei de rotaţie R;
R - matricea de rotaţie în spaţiul tridimensional; raza medie a Pământului; punct de reper (de sprijin);
R_1,R_2,R_3 - liniile matricei R;
$R_\omega,R_\varphi,R_\kappa$ - matricele corespunzătoare rotaţiilor plane ω, φ şi κ;
R',R'' - matricele de rotaţie ale fotogramei din stânga, respectiv din dreapta;
S - matrice superior triunghiulară; vârful unui fascicul de drepte;
T - matrice inferior triunghiulară;
T - indice superior reprezentând transpusa unei matrice;
u - ultima iteraţie;
u,v,w - parametrii directori ai unei drepte; cu indicii ′ şi ″ se notează parametrii directori ai unei perechi de raze conjugate;
v - corecţii ale mărimilor măsurate (eventual cu indici corespunzători);
V - vectorul corecţiilor măsurătorilor;
W - vectorul termenilor liberi (în cazul măsurătorilor condiţionate);
x,y - coordonate măsurate pe o fotogramă;
x_p,y_p - coordonatele punctului principal;
x',y' - coordonate-imagine (corectate) pe o fotogramă sau pe fotograma din stânga a unei stereograme;
x'',y'' - coordonate-imagine (corectate) pe fotograma din dreapta a unei stereograme;
x,y,z - coordonate-model;
x',y',z' - coordonate în sistemul spaţial al fotogramei din stânga;
x'',y'',z'' - coordonate în sistemul spaţial al fotogramei din dreapta;

Scanned with OKEN Scanner

x'_o, y'_o, z'_o - coordonatele centrului de proiecţie din stânga (la formarea stereomodelului);

x''_o, y''_o, z''_o - coordonatele centrului de proiecţie din dreapta (la formarea stereomodelului);

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ - coordonate fotogrametrice reduse la centrul de greutate;

X, Y, Z - coordonate-teren (în spaţiul-obiect);

X_o, Y_o, Z_o - coordonatele-teren ale centrului de perspectivă al unei fotograme sau ale originii sistemului de coordonate-model (în cazul unei stereograme); eventualii indici ′ şi " fac referire la fotograma din stânga, respectiv din dreapta;

α, β, γ - notaţii utilizate pentru unghiuri;

δ - corecţii provenind din constrângeri;

Δ - vectorul corecţiilor necunoscute; vectorul translaţiilor; urmat de simbolul unei mărimi reprezintă o creştere (de obicei mică) a acelei mărimi;

$\dot{\Delta}$ - vectorul corecţiilor elementelor de orientare;

$\ddot{\Delta}$ - vectorul corecţiilor coordonatelor necunoscute;

(Δ) - o dreaptă (axă);

ε - unghi reprezentând neortogonalitatea axelor; toleranţă, la oprirea iteraţiilor;

ε_i - eroarea reală a unei măsurători l_i;

θ - notaţie generică pentru rotaţii; azimutul unei direcţii;

λ - factor de proporţionalitate; eventualii indici ′ şi " fac referire la imaginea din stânga, respectiv din dreapta;

μ - microni; factor (scalar); eroarea medie pătratică (standard) a unei măsurători fictive;

ξ - notaţie generică a parametrilor de orientare;

$\dot{\Pi}$ - plan; produsul elementelor specificate după acest simbol;

ρ - raport anarmonic (biraport) sau coordonată proiectivă;

σ - eroarea medie pătratică (abaterea standard), cu indice corespunzător; element al matricei de varianţă-covarianţă;

Σ - suma elementelor specificate după acest simbol, înlocuit uneori cu notaţia Gauss [...];

χ - notaţie generică pentru coordonate-teren;

ω, φ, κ -unghiuri (respectiv) de înclinare transversală, longitudinală şi de rotaţie în planul fotogramei; cu indicii ′ şi " se notează unghiurile referitoare la cele două fotograme conjugate (în cazul unei stereograme);

Ω, Φ, K - unghiuri corespunzătoare celor notate cu ω, φ, şi κ, aplicate însă la un model stereoscopic.

Scanned with OKEN Scanner

2. ORIENTAREA INTERIOARĂ

După cum s-a arătat în paragraful anterior, orientarea interioară constă în reconstituirea fasciculului de raze din interiorul camerei, de la preluarea imaginii. În cazul unei proiecții centrale riguroase, orientarea interioară ar consta doar în determinarea poziției centrului de perspectivă în raport cu planul fotogramei și ar fi definită complet prin **distanța principală** (c=f) și **poziția punctului principal** (x_p,y_p). În realitate însă, **distorsiunea obiectivului** influențează direcțiile razelor fasciculului fotogrammetric și în consecință pozițiile punctelor-imagine pe fotogramă. De asemenea, **suportul emulsiei** suferă **deformații** între momentul expunerii și exploatarea fotogrammetrică, de care trebuie să se țină seama la reconstituirea fasciculului de la preluare.

Pe de altă parte, pozițiile punctelor-imagine sunt influențate și de o serie de factori externi, cum ar fi **refracția atmosferică**, **curbura Pământului**, **relieful**. Trebuie remarcat însă că influența reliefului se va manifesta ca eroare (ce nu poate fi corectată în punctele ale căror cote nu se cunosc) doar în cazul exploatării independente a fotogramelor, iar refracția atmosferică și curbura Pământului au o influență redusă și care se manifestă doar în cazul fotogramelor preluate de la înălțimi mari și mai ales dacă se folosesc camere cu unghi de deschidere mare sau foarte mare.

2.1. Sistemul de coordonate al fotogramei

Principala caracteristică a unei **fotograme** (fotografie metrică) este aceea că permite măsurători precise ale punctelor-imagine în raport cu un sistem de coordonate definit în funcție de elementele de orientare interioară și de cei 4 indici de referință (fig. 2.1).

Orice cameră fotogrammetrică permite înregistrarea pe fiecare imagine fotografică preluată a 4 indici de referință dispuși la mijloacele laturilor, sau în colțurile fotogramei. Teoretic, la intersecția liniilor care unesc indicii de referință

Scanned with OKEN Scanner

opuşi ar trebui să se afle punctul principal. Definirea punctului principal se poate face în diferite moduri. Fotogrammetric, prin **punct principal** se înţelege piciorul perpendicularei coborâte din centrul de perspectivă *O* pe planul fotogramei. Lungimea acestei perpendiculare (*Op*) se numeşte **distanţă principală** şi se consideră egală cu **distanţa focală calibrată** *f* a obiectivului camerei de preluare. Deoarece practic punctul principal *p* nu coincide cu **punctul mijlociu** *o* rezultat la intersecţia liniilor ce unesc indicii opuşi, va fi definit în raport cu acesta prin coordonatele x_p,y_p. Distanţa principală şi coordonatele punctului principal (în raport cu sistemul definit de indicii de referinţă) se determină prin calibrarea (etalonarea) camerei.

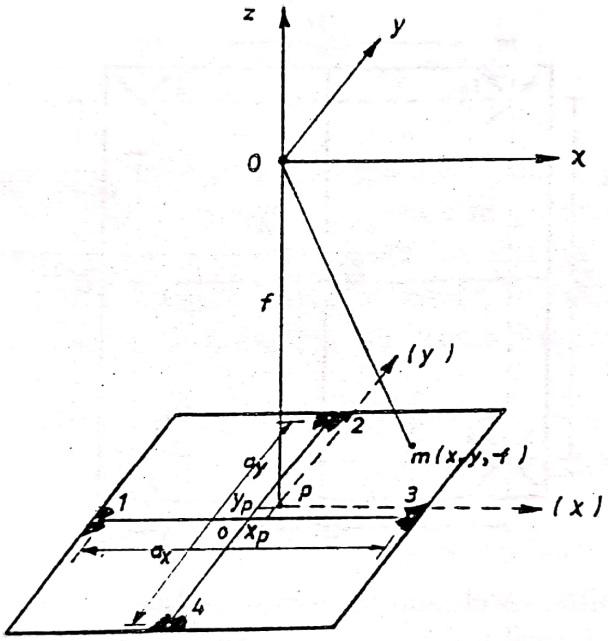

Figura 2.1. Sistemul de coordonate al fotogramei.

Sistemul spaţial de coordonate al fotogramei (fig.2.1) este un sistem ortogonal de dispunere pozitivă (v.paragraful A.1) având originea în centrul de perspectivă *O*. Axa *z* este perpendiculară pe planul fotogramei şi prin urmare planul (*x*,*y*) va fi paralel cu acesta. Presupunând perpendiculare direcţiile definite de indicii de referinţă opuşi, axele *Ox* şi *Oy* vor fi paralele cu aceste direcţii, cu precizarea că *Ox* se alege în concordanţă cu direcţia de zbor. În cazul indicilor de referinţă dispuşi la colţurile fotogramei, direcţiile care definesc axele *Ox* şi *Oy* unesc mijloacele segmentelor opuse dintre indici (fig. 2.2).

Având în vedere modul în care a fost definit sistemul de coordonate al fotogramei, un punct-imagine oarecare *m* (fig.2.1) va avea coordonatele *x*,*y*,-*f*.

2.2. Reducerea coordonatelor măsurate la punctul principal

Pentru a fi exprimate în sistemul de coordonate al fotogramei, coordonatele măsurate la un aparat de tip comparator (în raport cu o origine arbitrară) vor trebui reduse la punctul principal.

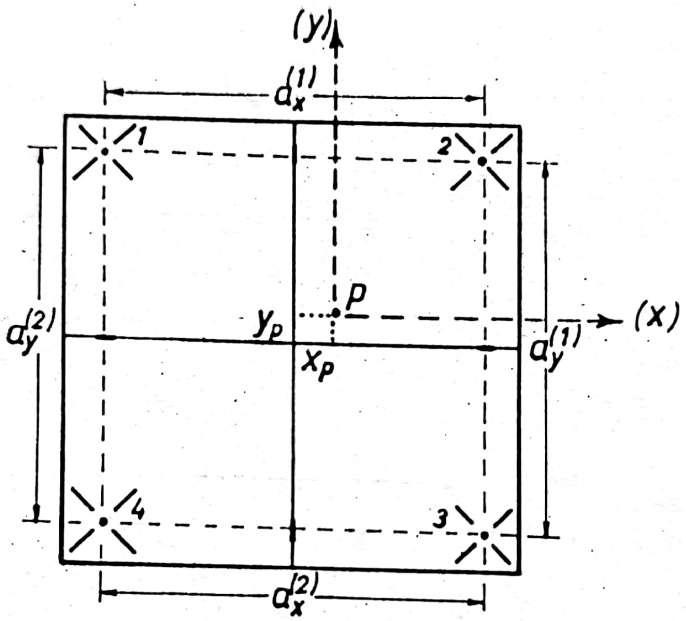

Figura 2.2. Definirea sistemului de referință (în planul fotogramei) în cazul indicilor dispuşi la colţurile fotogramei.

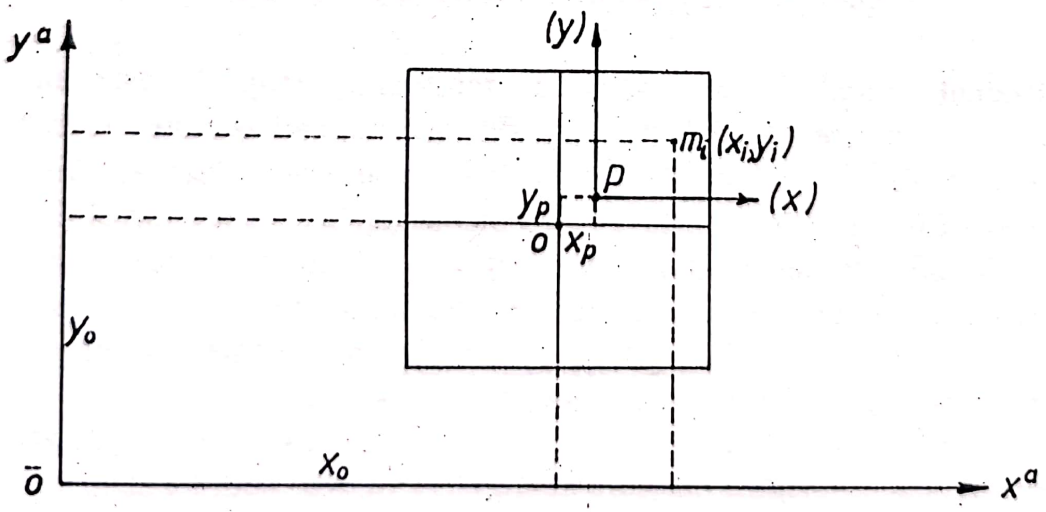

Figura 2.3. Reducerea coordonatelor la punctul principal.

Dacă se consideră fotograma orientată în aparat, adică proiecţiile $(x),(y)$ ale axelor x,y în planul fotogramei sunt paralele cu axele aparatului (comparatorului) x^a, y^a (fig. 2.3), coordonatele în sistemul fotogramei (reduse la punctul principal) se pot obţine cu relaţiile :

$$x_i = x_i^a - (x_o + x_p) ,$$
$$y_i = y_i^a - (y_o + y_p) , \qquad (2.1)$$

unde x_i, y_i şi x_i^a, y_i^a sunt coordonatele reduse, respectiv măsurate ale unui punct-imagine m_i ; x_o, y_o sunt coordonatele punctului mijlociu (rezultate ca medii ale valorilor corespunzătoare măsurate în cei 4 indici de referinţă):

$$x_o = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} x_j^a \ , \quad y_o = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} y_j^a \ , \qquad (2.2)$$

iar x_p, y_p sunt coordonatele punctului principal (în raport cu punctul mijlociu).

Deoarece valorile coordonatelor x_p, y_p sunt în general neglijabile, punctul principal se consideră practic în coincidenţă cu punctul mijlociu, reducerea coordonatelor făcându-se de fapt în raport cu acesta. În continuare se va avea în vedere doar această situaţie, aproximarea pe care o implică neafectând practic determinările ulterioare.

În ceea ce priveşte orientarea fotogramei în aparat, aceasta nu este necesară, rotaţia fotogramei fiind inclusă în relaţiile prin care se corectează coordonatele-imagine.

Trebuie remarcat că înainte de a fi utilizate la rezolvarea diferitelor probleme ale fotogrammetriei analitice, **coordonatele reduse** vor trebui corectate de influenţa principalelor erori sistematice. Deşi multe dintre aceste erori au cauze exterioare (după cum s-a arătat în introducerea acestui capitol) ele vor fi tratate aici, urmărind restabilirea unei corespondenţe proiective riguroase între imaginea fotografică şi terenul/obiectul fotografiat, înaintea realizării orientării exterioare.

Este important de reţinut că aceste corecţii trebuie să fie aplicate secvenţial, în ordine inversă apariţiei erorilor corespunzătoare. Pentru a nu complica prea mult notaţiile, în fiecare caz x'_i şi y'_i vor reprezenta coordonatele corectate în acea etapă, iar x_i, y_i vor fi cele care urmează fi corectate (şi care în etapa anterioară erau x'_i, y'_i).

Scanned with OKEN Scanner

2.3. Corectarea erorilor instrumentale

Pentru determinarea erorilor instrumentale care afectează coordonatele măsurate la un comparator, se utilizează de obicei grile. Acestea sunt rețele rectangulare pătratice trasate cu mare precizie pe plăci de sticlă. Intersecțiile unei astfel de rețele vor avea în sistemul grilei (fig. 2.4) coordonate bine stabilite. Dacă de exemplu, rețeaua este trasată la intervale a, punctul 1 va avea coordonatele calibrate $x'_1 = -2a$, $y'_1 = 2a$ etc.

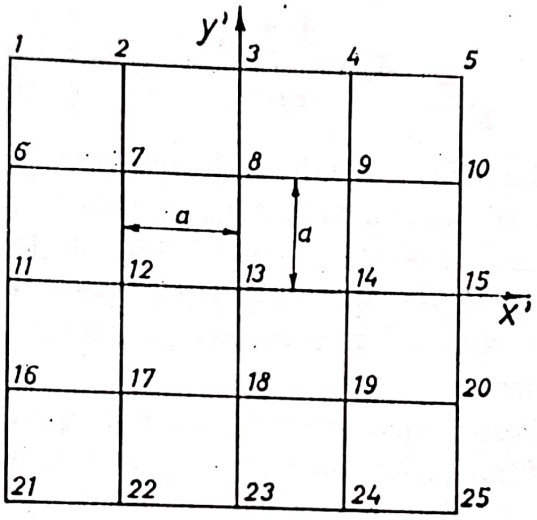

Figura 2.4. Grilă.

Dacă se introduce grila în aparat și se orientează aproximativ, se pot măsura coordonatele intersecțiilor rețelei în sistemul comparatorului, care se vor reduce apoi la punctul mijlociu al grilei (după cum s-a arătat în paragraful precedent). Deoarece coordonatele măsurate vor fi afectate atât de erori instrumentale (sistematice), cât și de erori întâmplătoare, acestea din urmă vor putea fi reduse prin repetarea măsurătorilor, luând apoi mediile corespunzătoare.

Presupunând că erorile instrumentale constau doar în erori de etalonare a șuruburilor de măsurare (erori de pas) dm_x și dm_y și în erori provenind din neortogonalitatea axelor $d\varepsilon$ și având în vedere așezarea aproximativă a grilei în aparat implicând rotirea $d\kappa$ și translațiile dx_o, dy_o (fig. 2.5), între coordonatele măsurate x_i, y_i și cele calibrate x'_i, y'_i ale unui punct i al rețelei se pot scrie relații de forma:

$$\begin{aligned} x'_i &= a_o + a_1 x_i + a_2 y_i \ , \\ y'_i &= b_o + b_1 x_i + b_2 y_i \ . \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Aceste relaţii exprimă o **transformare afină în plan** (A.7), iar parametrii a_o,a_1,a_2,b_o,b_1,b_2 reprezintă grupări ale celor 6 elemente $dm_x,dm_y,d\varepsilon,d\kappa,dx_o,dy_o$ (după cum se arată în paragraful A.2.1.b).

Având în vedere că în relaţiile (2.3) intervin atât mărimi măsurate cât şi parametri necunoscuţi, pentru determinarea acestor parametri se va utiliza cazul general de compensare prin metoda pătratelor minime (v.paragraful C.2.5), sistemul de ecuaţii liniarizate fiind de forma (C.133):

$$A\,V + B\,\Delta - W = O\,.$$

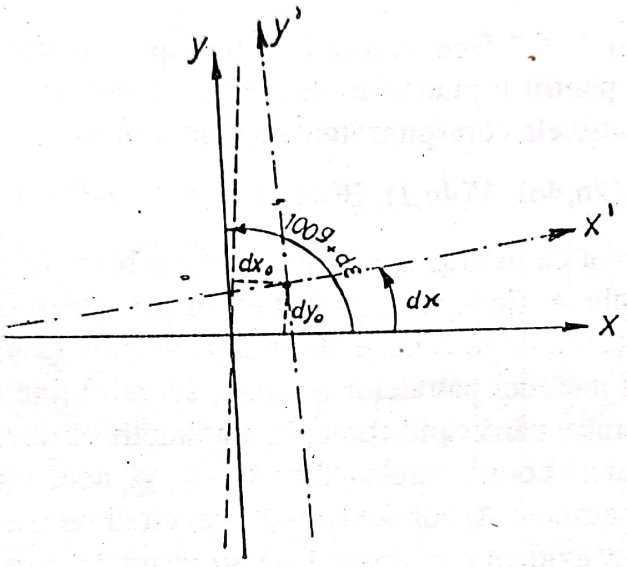

Figura 2.5. Elementele transformării afine.

Scriind relaţiile (2.3) ca două funcţii:

$$f_1 = a_o + a_1x + a_2y - x' = 0\,,$$

$$f_2 = b_o + b_1x + b_2y - y' = 0$$

şi ţinând seama de forma matricelor A şi B (considerând ca mărimi măsurate atât coordonatele x,y, cât şi x',y'):

$$A_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} & \frac{\partial f_1}{\partial y_i} & \frac{\partial f_1}{\partial x'_i} & \frac{\partial f_1}{\partial y'_i} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_i} & \frac{\partial f_2}{\partial y_i} & \frac{\partial f_2}{\partial x'_i} & \frac{\partial f_2}{\partial y'_i} \end{pmatrix}$$

$$B_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_o} & \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \frac{\partial f_1}{\partial a_2} & \frac{\partial f_1}{\partial b_o} & \frac{\partial f_1}{\partial b_1} & \frac{\partial f_1}{\partial b_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_o} & \frac{\partial f_2}{\partial a_1} & \frac{\partial f_2}{\partial a_2} & \frac{\partial f_2}{\partial b_o} & \frac{\partial f_2}{\partial b_1} & \frac{\partial f_2}{\partial b_2} \end{pmatrix}_i$$

pentru fiecare punct *i* se vor putea scrie câte două ecuaţii:

$$\begin{pmatrix} a_1^o & a_2^o & -1 & 0 \\ b_1^o & b_2^o & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} da_o \\ da_1 \\ da_2 \\ db_o \\ db_1 \\ db_2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x'-a_o^o-a_1^o x-a_2^o y \\ y'-b_o^o-b_1^o x-b_2^o y \end{pmatrix}=O\ , \qquad (2.4)$$

unde indicele superior " ^{o} " face referire la valori aproximative iniţiale.

În consecinţă, pentru *n* puncte se vor scrie *2n* ecuaţii constituind un sistem de forma (C.133), matricele corespunzătoare având dimensiunile:

$$A(2n,4n),\ V(4n,1),\ B(2n,6),\ \Delta(6;1),\ W(2n,1)\ .$$

Trebuie remarcat că matricea *A* este o matrice bloc diagonală, cu observaţia că submatricele nenule A_i (independente totuşi de punctul *i*) sunt dreptunghiulare, având dimensiunile (2,4), după cum se observă în relaţiile (2.4).

Prin aplicarea metodei pătratelor minime, se va obţine soluţia (C.138) şi se va relua procesul iterativ până când corecţiile parametrilor devin nesemnificative.

Dacă se consideră coordonatele calibrate x'_i, y'_i neafectate de erori, $v_{x'}$ şi $v_{y'}$ vor fi nule, iar submatricele A_i vor deveni pătrate, cu dimensiunile (2,2).

O simplificare evidentă ar apare însă în cazul în care s-ar considera doar coordonatele x',y' ca mărimi măsurate, cu matricea cofactorilor unitară. În acest caz, ecuaţiile (2.4) s-ar scrie sub forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \\ b_o \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix} \qquad (2.5)$$

corespunzând de asemenea situaţiei în care aproximaţiile iniţiale ale parametrilor ar fi nule : $a_o^o = a_1^o = a_2^o = b_o^o = b_1^o = b_2^o = 0$ (dar iteraţiile ar trebui continuate).

Pe de altă parte, se observă că relaţiile (2.5) rezultă chiar din (2.3), fără a mai fi necesară liniarizarea (cum era în cazul general) şi deci permit determinarea directă a celor 6 parametri. De asemenea, trebuie remarcat că această situaţie corespunde măsurătorilor indirecte (v.paragraful C.2.2).

Presupunând în plus coordonatele x_i, y_i reduse la centrul de greutate:

Scanned with OKEN Scanner

$$\bar{x}_i = x_i - x_g \quad , \quad \bar{y}_i = y_i - y_g \, ,$$

$$x_g = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad , \quad y_g = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \, , \tag{2.6}$$

având proprietatea:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i = 0 \quad , \tag{2.7}$$

sistemul de ecuaţii normale va căpăta forma :

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\bar{x}^2] & [\bar{x}\bar{y}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\bar{x}\bar{y}] & [\bar{y}^2] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [\bar{x}^2] & [\bar{x}\bar{y}] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [\bar{x}\bar{y}] & [\bar{y}^2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \\ b_o \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [x'] \\ [x'\bar{x}] \\ [x'\bar{y}] \\ [y'] \\ [y'\bar{x}] \\ [y'\bar{y}] \end{pmatrix}$$

utilizând simbolul de sumă Gauss.

Acelaşi sistem poate fi scris însă mai convenabil:

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & [\bar{x}^2] & [\bar{x}\bar{y}] \\ 0 & [\bar{x}\bar{y}] & [\bar{y}^2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_o & b_o \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [x'] & [y'] \\ [x'\bar{x}] & [y'\bar{x}] \\ [x'\bar{y}] & [y'\bar{y}] \end{pmatrix}$$

permiţând obţinerea foarte uşoară a celor 6 parametri necunoscuţi. Dacă şi coordonatele x'_i , y'_i sunt reduse la centrul de greutate se observă că translaţiile a_o, b_o devin nule, iar transformarea (2.3) va deveni o transformare centro-afină (de tipul A.8).

Totuşi, această soluţie (simplă din punct de vedere practic) este mai puţin riguroasă teoretic deoarece coordonatele x_i , y_i nu au fost luate în consideraţie ca mărimi măsurate. La aceasta s-ar putea adăuga faptul că matricea cofactorilor poate să nu fie chiar matricea unitate.

Scanned with OKEN Scanner

În fine, după obţinerea valorilor celor mai probabile ale parametrilor transformării, relaţiile (2.3) pot fi utilizate pentru determinarea coordonatelor corectate ale oricărui punct-imagine măsurat la aparatul respectiv.

Pe de altă parte, dacă se consideră erorile instrumentale mai complexe (luându-se în considerare eventualele curburi ale şinelor cărucioarelor etc.) se pot utiliza formule polinomiale de ordinul II sau III, cum ar fi cele de tipul (A.9):

$$\begin{aligned} x' &= a_o + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3 \\ y' &= b_o + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2 + b_6x^3 + b_7x^2y + b_8xy^2 + b_9y^3 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Aceste relaţii conţin 20 de parametri necunoscuţi, pentru determinarea cărora se va utiliza metoda pătratelor minime în acelaşi mod în care a fost tratat cazul transformării afine. Dacă n este numărul de puncte al reţelei, pentru aplicarea procedeului menţionat va trebui îndeplinită condiţia $2n>20$ (adică, $n>10$).

După obţinerea valorilor celor mai probabile ale parametrilor transformării, se vor putea calcula coordonatele corectate x'_i, y'_i ale tuturor punctelor ce se măsoară la aparatul respectiv pe baza relaţiilor (2.8).

2.4. Corectarea deformării suportului emulsiei

Suportul emulsiei (film sau sticlă) suferă deformaţii între momentul expunerii şi cel al efectuării măsurătorilor. Dacă în general deformarea sticlei este neglijabilă, cea a filmului trebuie luată în considerare. Această deformare se datorează în principal procesului chimic de prelucrare fotografică, precum şi condiţiilor de temperatură şi de umiditate în care este păstrat filmul. Metoda de corectare depinde de tipul constructiv al camerei de preluare şi de datele de calibrare ale acesteia. De asemenea, se va avea în vedere dacă la măsurarea coordonatelor-imagine ale indicilor de referinţă fotograma a fost orientată în aparat, sau a fost poziţionată aproximativ.

Presupunând mai întâi că fotograma a fost orientată în aparat şi că indicii de referinţă sunt situaţi la mijloacele laturilor (fig. 2.1), dispunându-se de asemenea de distanţele calibrate a'_x, a'_y dintre indicii opuşi (1-3 si 2-4), se pot calcula coeficienţii de deformare pe cele două direcţii :

$$m_x = \frac{a'_x}{a_x} \quad , \quad m_y = \frac{a'_y}{a_y}$$

Scanned with OKEN Scanner

Trebuie remarcat că deoarece la aparat se măsoară coordonate, distanţele a_x şi a_y se calculează cu ajutorul acestora.

În cazul indicilor dispuşi la colţurile fotogramei (fig. 2.2) se vor obţine câte două valori pentru fiecare coeficient de deformare (corespunzătoare distanţelor $a_x^{(1)}, a_x^{(2)}$ respectiv $a_y^{(1)}$, $a_y^{(2)}$, calculându-se apoi mediile :

$$m_x = \frac{m_x^{(1)} + m_x^{(2)}}{2} \quad , \quad m_y = \frac{m_y^{(1)} + m_y^{(2)}}{2}$$

Coordonatele corectate x'_i şi y'_i se vor obţine prin transformări liniare de scară:

$$\begin{aligned} x'_i &= m_x\, x_i \,, \\ y'_i &= m_y\, y_i \,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

De obicei însă, fotograma nu se orientează riguros în aparat, deoarece relaţiile prin care se corectează deformarea suportului emulsiei pot include această situaţie. Astfel, dacă se consideră deformarea uniformă în cele două direcţii (m_x=m_y=m), printr-o **transformare conformă liniară în plan** (A.4) se realizează şi o rotaţie şi două translaţii:

$$\begin{cases} x' = a_o + a_1 x - b_1 y \\ y' = b_o + b_1 x + a_1 y \,. \end{cases} \tag{2.10}$$

Deoarece în aceste relaţii apar atât mărimi măsurate (x_i, y_i şi x'_i, y'_i), cât şi 4 parametri necunoscuţi (a_o,b_o,a_1,b_1), situaţia corespunde cazului general de compensare prin metoda pătratelor minime (v.paragraful C.2.5).

Astfel, ca şi în paragraful anterior, pentru fiecare punct i se vor putea scrie câte două ecuaţii asemănătoare cu (2.4):

$$\begin{pmatrix} a_1^o & -b_1^o & -1 & 0 \\ b_1^o & a_1^o & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & -y \\ 0 & 1 & y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} da_o \\ db_o \\ da_1 \\ db_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' - a_o^o - a_1^o x + b_1^o y \\ y' - b_o^o - b_1^o x - a_1^o y \end{pmatrix} = O. \tag{2.11}$$

Pentru cei 4 indici de referinţă vor rezulta deci 8 ecuaţii constituind un sistem de forma (C.133), cu soluţia (C.138).

Dacă se consideră coordonatele ($x,y;x',y'$) necorelate şi cu precizii *egale* (P=Q=I), iar aproximatiile iniţiale ale parametrilor $a_o^o = b_o^o = a_1^o = b_1^o = 0$, ecuaţiile (2.11) vor căpăta o formă simplificată:

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x & -y \\ 0 & 1 & y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_o \\ b_o \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix} . \qquad (2.12)$$

Această formă corespunde măsurătorilor indirecte (v.paragraful C.2.2) şi se poate obţine chiar din relaţiile (2.10), fără a mai fi necesară liniarizarea, permiţând astfel determinarea celor 4 parametri fără a mai parcurge un proces iterativ.

Deoarece totuşi şi coordonatele x_i, y_i sunt mărimi măsurate, corecţiile $v_{x'}, v_{y'}$ ar trebui considerate ca fiind formate din câte două componente: una asociată coordonatelor x', respectiv y' şi alta coordonatelor corespunzătoare "**transformate**" din sistemul (x,y).

Deoarece coordonatele x_i, y_i se consideră (fără a fi notate distinct) reduse la centrul lor de greutate (punctul mijlociu) şi au proprietăţile (2.7), ecuaţiile (2.12) duc la un sistem de ecuaţii normale cu matricea coeficienţilor diagonală:

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [x^2+y^2] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [x^2+y^2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_o \\ b_o \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [x'] \\ [y'] \\ [x'x+y'y] \\ [y'x-x'y] \end{pmatrix} .$$

De aici, cei 4 parametri se pot obţine direct:

$$a_o = \frac{[x']}{n} \quad , \quad b_o = \frac{[y']}{n} \quad , \quad a_1 = \frac{[x'x+y'y]}{[x^2+y^2]} \quad , \quad b_1 = \frac{[y'x-x'y]}{[x^2+y^2]} . \qquad (2.13)$$

Pe de altă parte, se observă că dacă şi coordonatele x'_i, y'_i sunt reduse la centrul de greutate, translaţiile a_o şi b_o devin nule şi în locul transformării (2.10) se poate folosi transformarea:

$$\begin{cases} x' = a_1 x - b_1 y \\ y' = b_1 x + a_1 y \end{cases}$$

Deşi s-ar părea că această soluţie simplificată este mai puţin riguroasă (din considerentele specificate anterior), trebuie precizat că în cazul coordonatelor necorelate şi cu precizii egale ale tuturor punctelor (x_i, y_i, x'_i, y'_i), sau când x_i, y_i au precizii egale, iar x'_i, y'_i au de asemenea precizii egale, dar diferite de cele ale coordonatelor x_i, y_i, soluţia este totuşi riguroasă.

Astfel, în aceste condiţii se poate constata că dacă se consideră soluţia simplificată (2.13) ca rezultat al unei prime iteraţii a cazului general (pe baza unor

Scanned with OKEN Scanner

valori aproximative nule), în iteraţia a doua se obţin corecţii egale cu zero, valorile parametrilor rămânând cele date de formulele (2.13). De asemenea, se poate remarca obţinerea aceleiaşi matrice de varianţă-covarianţă ca şi în cazul simplificat. Desigur, toate acestea sunt valabile în condiţiile menţionate.

În fine, după determinarea parametrilor transformării, se pot calcula coordonatele corectate ale tuturor punctelor măsurate, pe baza formulelor (2.10).

Considerând acum deformarea neuniformă pe cele două direcţii (corespunzătoare direcţiei de rulare a filmului şi perpendicular pe aceasta), iar fotograma neorientată în aparat, va trebui aplicată **transformarea afină în plan** (A.7) în forma (2.3) şi cu rezolvarea indicată în paragraful anterior, cu observaţia că aici numărul de ecuaţii va fi 8, corespunzând celor 4 indici de referinţă.

În cazul în care se neglijează translaţiile (a_o, b_o), atât coordonatele măsurate cât şi cele calibrate fiind reduse la punctul mijlociu (acesta fiind considerat în coincidenţă cu punctul principal) relaţiile (2.3) devin:

$$\begin{aligned} x'_i &= a_1 x_i + a_2 y_i \\ y'_i &= b_1 x_i + b_2 y_i \end{aligned} \qquad (2.14)$$

similare cu (A.8) şi reprezentând o **transformare centro-afină**, care matriceal se poate scrie sub forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Considerând coordonatele calibrate x', y' neafectate de erori, se vor exprima coordonatele măsurate x, y în funcţie de acestea, reducând cazul general de compensare la cazul **măsurătorilor indirecte** (v.paragraful C.2.2), mult mai uşor de rezolvat:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \qquad (2.15)$$

În forma aceasta însă, ecuaţile nu mai sunt liniare în raport cu parametrii necunoscuţi. O primă soluţie ar fi liniarizarea, dar aceasta va conduce la un proces iterativ. Este posibilă însă o rezolvare mai simplă, dacă în locul parametrilor a_1, a_2, b_1, b_2 se introduc alţi 4 parametri c_1, c_2, d_1, d_2 (de asemenea funcţional independenţi) prin substituţiile:

$$c_1 = \frac{b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad c_2 = \frac{-a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad d_1 = \frac{-b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad d_2 = \frac{a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Cu aceste notaţii, relaţiile (2.15) devin

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

De aici, se pot deduce ecuaţiile de corecţii pentru fiecare punct i :

$$\begin{aligned} x'_i\, c_1 + y'_i\, c_2 - x_i &= v_{x_i}, \\ x'_i\, d_1 + y'_i\, d_2 - y_i &= v_{y_i}. \end{aligned} \qquad (2.16)$$

Se observă că cele două relaţii sunt independente în raport cu parametrii necunoscuţi (c_1,c_2, respectiv d_1,d_2). Se vor putea forma prin urmare două sisteme de câte 4 ecuaţii (pentru cei 4 indici) cu câte două necunoscute. Sistemele de ecuaţii normale corespunzătoare vor avea însă aceeaşi matrice a coeficienţilor şi se vor putea scrie într-o formă simplificată:

$$\begin{pmatrix} [x'x'] & [x'y'] \\ [x'y'] & [y'y'] \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c:c} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} [x'x] & [x'y] \\ [y'x] & [y'y] \end{array}\right), \qquad (2.17)$$

de unde se pot deduce uşor cei 4 parametri ai transformării inverse. Cu ajutorul acestora se vor determina parametrii iniţiali:

$$a_1 = \frac{d_2}{c_1d_2 - c_2d_1}, \quad a_2 = \frac{-c_2}{c_1d_2 - c_2d_1}, \quad b_1 = \frac{-d_1}{c_1d_2 - c_2d_1}, \quad b_2 = \frac{c_1}{c_1d_2 - c_2d_1} \qquad (2.18)$$

În sfârşit, cunoscând aceşti parametri, se vor putea calcula coordonatele corectate ale fiecărui punct măsurat folosind relaţiile (2.14). E bine de reamintit că este vorba de coordonate reduse la punctul mijlociu.

În cazul indicilor dispuşi la colţurile fotogramei, care permit un control mai bun al deformării, este recomandabil să se utilizeze o transformare biliniară de forma (A.10):

$$\begin{aligned} x' &= a_o + a_1x + a_2y + a_3xy, \\ y' &= b_o + b_1x + b_2y + b_3xy. \end{aligned} \qquad (2.19)$$

După cum se observă, aceste relaţii conţin în plus (faţă de transformarea afină) termenul hiperbolic (în xy) şi conţin 8 parametri independenţi.

Pentru cei 4 indici de referinţă se vor putea scrie 8 ecuaţii cu 8 necunoscute şi, presupunând măsurătorile lipsite de erori, cei 8 parametri se vor obţine prin rezolvarea acestui sistem.

Având în vedere însă că mărimile x, y şi x', y' sunt reduse la punctul mijlociu, iar acesta poate fi asimilat cu punctul principal, translaţiile a_o,b_o se pot considera nule şi prin urmare relaţiile (2.19) vor căpăta forma:

Scanned with OKEN Scanner

$$x' = a_1x + a_2y + a_3xy\,,$$
$$y' = b_1x + b_2y + b_3xy\,. \qquad (2.20)$$

În această situaţie se poate aplica metoda pătratelor minime, cazul general (v.paragraful C.2.5), obţinându-se valorile cele mai probabile ale celor 6 parametri ai transformării.

Coordonatele corectate se vor putea determina apoi pentru fiecare punct măsurat, pe baza relaţiilor (2.20).

Deoarece camerele prevăzute cu 8 indici de referinţă sau cu reţea sunt destul de rare, nu vor fi dezvoltate aici aceste cazuri particulare, menţionându-se doar că în aceste situaţii pot fi utilizate polinoame de ordin superior (II sau III).

2.5. Corectarea distorsiunii obiectivului

După cum se ştie din optică, razele de lumină incidente, trecând prin obiectiv se refractă sub unghiuri diferite (faţă de axa optică), producând o aberaţie de poziţie a punctelor-imagine. **Distorsiunea liniară** se va defini prin urmare ca diferenţa între poziţia efectivă a unui punct-imagine şi poziţia pe care acesta ar fi trebuit să o aibă într-o proiecţie centrală corectă. Această diferenţă de poziţie (considerată ca vector) este rezultanta a două componente: **distorsiunea radială** şi **distorsiunea tangenţială**. Trebuie precizat însă că distorsiunea tangenţială este practic neglijabilă în cazul obiectivilor simetrici (cum sunt în general obiectivii fotogrammetrici).

În ceea ce priveşte **distorsiunea radială** (fig. 2.6), ea poate fi corectată prin relaţii de forma:

$$x'_i = x_i - \Delta x_i = x_i\left(1 - \frac{\Delta r_i}{r_i}\right) = x_i c_i\,,$$
$$y'_i = y_i - \Delta y_i = y_i\left(1 - \frac{\Delta r_i}{r_i}\right) = y_i c_i\,, \qquad (2.21)$$

unde

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \qquad (2.22)$$

şi s-au avut în vedere egalităţile (conform figurii 2.6):

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta r}{r}\,.$$

Trebuie menţionat că distorsiunea se consideră pozitivă, când determină deplasarea punctului spre exterior. Prin urmare, în figura 2.6 punctul m reprezintă poziţia efectivă, iar m' poziţia corectă (fără distorsiune) a unui punct-imagine. De asemenea, ar fi de precizat că distanţele radiale ar trebui determinate în raport cu **punctul de simetrie** (punctul faţă de care distorsiunea radială prezintă o simetrie optimă în toate direcţiile). Totuşi practic, acest punct se consideră în coincidenţă cu punctul mijlociu (şi cu punctul principal).

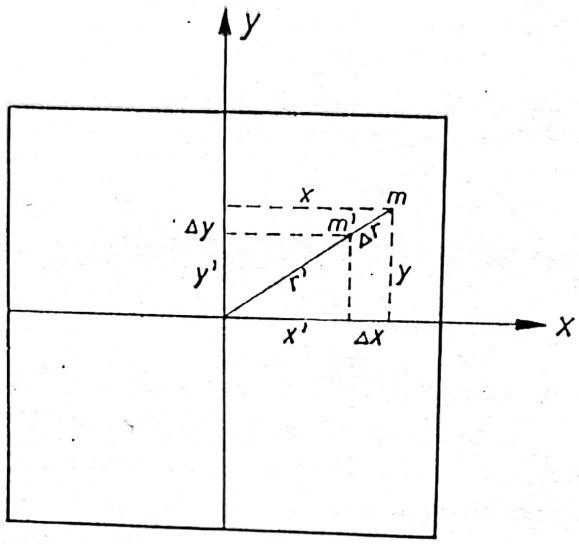

Figura 2.6. Distorsiunea radială.

În ceea ce priveşte determinarea erorilor de distorsiune, aceasta se face prin calibrarea obiectivilor (etalonarea camerelor). De asemenea, pot fi utilizate valorile distorsiunii furnizate de constructor. Aceste date se pot prezenta sub forma unor curbe de egală distorsiune sau sub formă de tabele, de unde se poate determina distorsiunea Δr în funcţie de distanţa radială r. Mult mai convenabilă este însă (în cazul corectării pe cale analitică a distorsiunii), utilizarea funcţiei de distorsiune:

$$\Delta r = f(r) = a_1 r + a_2 r^3 + a_3 r^5 + a_4 r^7 + \ldots \qquad (2.23)$$

Această funcţie, ţinând seama de modul de manifestare a distorsiunii (ilustrat în alura generală a unei curbe de distorsiune) este un polinom conţinând puterile impare ale distanţei radiale r, din care este suficient în general să se reţină primii 4 termeni. Valorile coeficienţilor a_1, a_2, a_3, a_4 (proprii obiectivului respectiv) se determină cunoscând erorile de distorsiune Δr_i în cel puţin 4 puncte convenabil dispuse, situate la anumite distanţe radiale r_i. Dacă numărul punctelor $n>4$, se pot obţine valorile cele mai probabile ale acestor coeficienţi, aplicând metoda pătratelor minime.

Scanned with OKEN Scanner

Cunoscând acum cei 4 coeficienţi, se vor putea calcula valorile corectate ale coordonatelor fiecărui punct măsurat pe baza relaţiilor (2.21), unde coeficientul c_i (propriu fiecărui punct i) este dat de formula:

$$c_i = 1 - a_1 - a_2 r_i^2 - a_3 r_i^4 - a_4 r_i^6 \ .$$

În ceea ce priveşte **distorsiunea tangenţială**, aceasta se datoreşte în principal centrării imperfecte a lentilelor ce compun obiectivul, precum şi altor defecte constructive ale acestuia. După cum s-a precizat însă la începutul paragrafului, distorsiunea tangenţială este practic neglijabilă. Totuşi, având în vedere uşurinţa cu care se pot aplica analitic diferitele corecţii este recomandabil, mai ales în cazul unor determinări de mare precizie, să se ţină seama şi de distorsiunea tangenţială (asimetrică). Pentru aceasta se pot folosi relaţii de forma (2.21), unde corecţiile Δx_i, Δy_i vor avea expresiile (deduse de D. Brown):

$$\begin{aligned} \Delta x &= (t_1(r^2 + 2x^2) + 2t_2xy)(1 + t_3r^2 + t_4r^4 + ...) \ , \\ \Delta y &= (2t_1xy + t_2(r^2 + 2y^2))(1 + t_3r^2 + t_4r^4 + ...) \ , \end{aligned} \qquad (2.24)$$

cu observaţia că în ultima paranteză va fi suficient să se păstreze doar primii doi termeni.

Trebuie remarcat că în cazul în care se are în vedere distorsiunea tangenţială, aceasta nu se corectează însă independent, ci împreună cu cea radială şi prin urmare Δx şi Δy din relaţiile (2.24) se cumulează cu corecţiile corespunzătoare distorsiunii radiale:

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x_i(a_1 + a_2 r_i^2 + a_3 r_i^4 + a_4 r_i^6) + (t_1(r_i^2 + 2x_i^2) + 2t_2x_iy_i)(1 + t_3r_i^2) \ , \\ \Delta y_i &= y_i(a_1 + a_2 r_i^2 + a_3 r_i^4 + a_4 r_i^6) + (2t_1x_iy_i + t_2(r_i^2 + 2y_i^2))(1 + t_3r_i^2) \ . \end{aligned} \qquad (2.25)$$

Cei 7 coeficienţi necunoscuţi (primii 4 proprii distorsiunii radiale, iar ceilalţi 3, distorsiunii tangenţiale) se determină în procesul de calibrare a camerei. Pe baza acestor coeficienţi, a coordonatelor măsurate x_i, y_i şi a distanţelor radiale corespunzătoare calculate cu relaţia (2.22) se pot determina corecţiile Δx_i , Δy_i pentru fiecare punct i şi, utilizând relaţiile (2.21), se pot obţine coordonatele corectate x'_i, y'_i.

Scanned with OKEN Scanner

2.6. Corectarea influenţei refracţiei atmosferice

La aerofotografiere, razele de lumină ce vin din teren la camera de preluare din avion parcurg straturi de aer cu densităţi descrescătoare (datorită condiţiilor diferite de temperatură, presiune, umiditate etc.) Aceasta face ca fiecare rază să urmeze o traiectorie curbă (cu concavitatea către verticala *ON*) în locul liniei drepte teoretice (fig. 2.7).

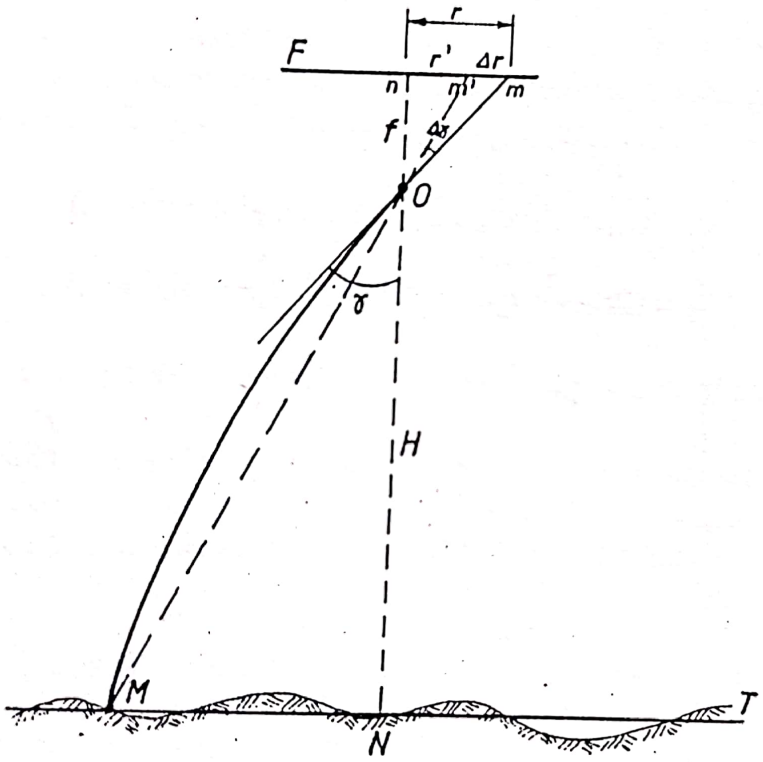

Figura 2.7. Influenţa refracţiei atmosferice.

Imaginea *m* a unui punct *M*, din teren va corespunde tangentei în *O* la această curbă. Prin urmare, efectul refracţiei atmosferice constă în deplasarea tuturor imaginilor în exterior, faţă de punctul nadiral (asimilat practic cu punctul mijlociu şi cu punctul principal) şi deci, coordonatele corectate se vor obţine cu relaţii de forma (2.21), ca şi în cazul distorsiunii.

Prin diferenţierea relaţiei:

$$tg\gamma = \frac{r}{f} \quad , \qquad (2.26)$$

rezultată din figura 2.7, se obţine:

$$\left(1+tg^2\gamma\right)\Delta\gamma=\frac{\Delta r}{f}$$

Înlocuind $tg\,\gamma$ din (2.26) în această relaţie, rezultă:

$$\Delta r_i=\frac{r_i^2+f^2}{f}\Delta\gamma_i \qquad (2.27)$$

unde mărimea $\Delta\gamma$ este exprimată în radiani (respectiv $\Delta\gamma''/\rho''$).

Concret, deformarea unghiulară $\Delta\gamma_i$ cu ajutorul căreia se calculează deplasarea radială Δr_i se poate determina utilizând un tabel (care poate fi înregistrat în calculator), din care $\Delta\gamma_i$ se deduce în funcţie de unghiul γ_i, care se obţine pe baza relaţiei (2.26), şi de înălţimea de zbor H ([2], ediţia III, p.477).

Trebuie precizat că aceste consideraţii sunt valabile pentru fotogramele practic nadirale (cazul uzual). Dacă fotogramele sunt înclinate, deplasarea imaginilor datorită refracţiei va diferi faţă de situaţia prezentată anterior. În acest caz, coordonatele măsurate pe fotograma înclinată vor trebui întâi transformate în coordonate pe fotograma nadirală corespunzătoare şi corectate prin procedeul descris, după care vor fi aduse în situaţia iniţială (pe fotograma înclinată) prin transformarea inversă (v. capitolul următor).

2.7. Corectarea influenţei curburii Pământului

Curbura Pământului, evident, nu este o "eroare" în fotogrammetrie (cum e de exemplu distorsiunea obiectivului), ci reprezintă o problemă legată de definirea sistemelor de coordonate. În primul rând trebuie să se aibă în vedere faptul că fotograma aeriană reprezintă proiecţia centrală pe un plan a suprafeţei terestre (care poate fi considerată geoid, elipsoid de referinţă sau sferă). Dacă în spaţiul-obiect se alege ca sistem de coordonate sistemul geocentric (de ex.), influenţa curburii Pământului nu va apare ca "eroare". Dacă însă, fiecare punct din spaţiul-obiect va fi proiectat ortogonal pe un plan, această proiecţie va corespunde unei poziţii deplasate radial spre exterior (pe fotogramă) faţă de poziţia efectivă (fig. 2.8).

Prin urmare, având în vedere figura 2.6, coordonatele corectate se vor obţine utilizând relaţii asemănătoare cu (2.21):

Scanned with OKEN Scanner

$$x'_i = x_i + \Delta x_i = x_i\left(1+\frac{\Delta r_i}{r_i}\right) = x_i c'_i\ ,$$
$$y'_i = y_i + \Delta y_i = y_i\left(1+\frac{\Delta r_i}{r_i}\right) = y_i c'_i\ , \qquad (2.28)$$

unde r_i se calculează cu formula (2.22).

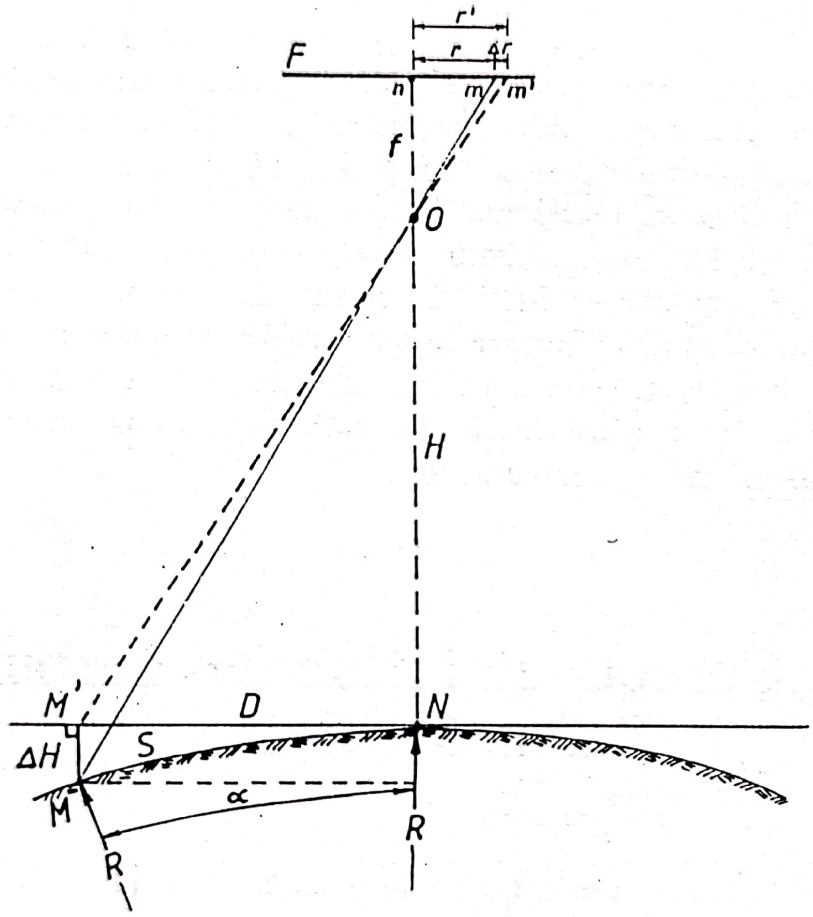

Figura 2.8. Corectarea influenţei curburii Pământului.

În ceea ce priveşte corecţia Δr, aceasta se poate obţine în urma unor dezvoltări matematice pe baza figurii 2.8 (în care Pământul a fost aproximat cu o sferă cu raza R=6370 km):

$$\Delta r = \frac{Hr^3}{2Rf^2}\ , \qquad (2.29)$$

unde H este înălţimea de zbor, iar f este distanţa focală a obiectivului camerei de preluare. În consecinţă, coeficientul c'_i din relaţiile (2.28) va avea forma:

Scanned with OKEN Scanner

$$c'_i = 1 + \frac{Hr_i^2}{2Rf^2} .$$

Aceste relaţii sunt valabile pentru cazul fotogramelor nadirale. În cazul fotogramelor înclinate se vor avea în vedere observaţiile prezentate în paragraful precedent.

Trebuie menţionat însă că aplicarea corecţiei privind curbura Pământului trebuie luată în consideraţie doar în cazul fotogramelor preluate de la înălţimi mari şi îndeosebi cu camere cu unghi de deschidere mare şi foarte mare, precum şi în cazul aerotriangulaţiei pe zone întinse.

2.8. Corectarea influenţei reliefului

În cazul exploatării independente a fotogramelor, va trebui să se ţină seama de influenţa diferenţelor de nivel din teren (faţă de un plan mediu de referinţă) care determină deplasări radiale ale punctelor-imagine pe fotogramă (în raport cu punctul nadiral).

Aceste deplasări se pot deduce din figura 2.9:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta H}{H} .$$

Situaţia fiind similară cu cea din paragraful 2.5 (v. fig. 2.6), pentru determinarea coordonatelor corectate se vor putea aplica relaţiile (2.21), unde coeficientul c_i (notat acum cu c''_i) va avea expresia:

$$c''_i = 1 - \frac{\Delta r_i}{r_i} = 1 - \frac{\Delta H_i}{H} .$$

Înălţimea relativă de zbor se poate calcula cu formula $H=m_f$ (f, m_f fiind numitorul scării medii a fotogramei.

În cazul în care nu se cunosc cotele punctelor pentru care trebuie aplicată corecţia de relief, acestea se pot obţine prin interpolare de pe un plan cu curbe de nivel.

Scanned with OKEN Scanner

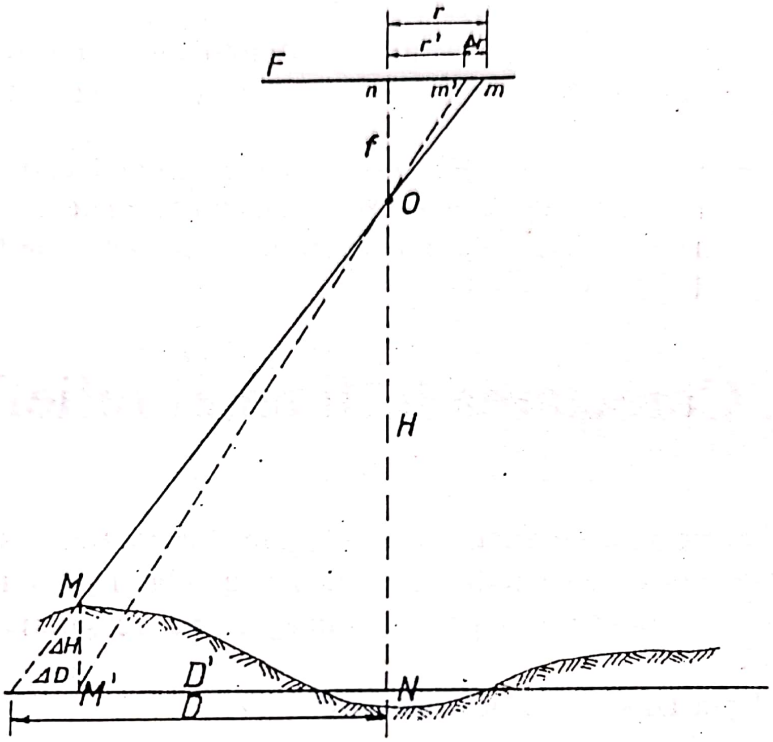

Figura 2.9. Corectarea influenţei reliefului.

Trebuie precizat că toate consideraţiile prezentate aici se referă la cazul uzual al fotogramelor nadirale.

Pe de altă parte, se poate menţiona că în cazul exploatării stereofotogrammetrice corecţia de relief nu se mai aplică, stereogramele permiţând reconstituirea spaţială a terenului.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

3. ORIENTAREA EXTERIOARĂ A UNEI FOTOGRAME

După cum s-a arătat în capitolul introductiv, orientarea exterioară constă în reconstituirea poziţiei camerei (respectiv a fotogramei) în raport cu sistemul de coordonate al spaţiului-obiect. Desigur, această definiţie se referă la cazul uzual al exploatării analitice utilizând elementele de orientare interioară, adică reconstituind fasciculul de la preluare.

3.1. Condiţia de coliniaritate

Având în vedere că în momentul preluării unei fotograme, fiecare punct din teren, imaginea sa pe fotogramă şi centrul de perspectivă sunt coliniare (în cazul unei proiecţii centrale riguroase), această condiţie va trebui îndeplinită şi la exploatare (considerând coordonatele-imagine corectate, conform celor prezentate în capitolul anterior).

Fie o fotogramă F (fig. 3.1) având centrul de perspectivă O', un punct din teren M cu coordonatele X,Y,Z în sistemul terenului ($OXYZ$) şi imaginea sa pe fotogramă m cu coordonatele $x,y,-f$ în sistemul fotogramei ($O'xyz$). De asemenea, se notează cu $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{A}$ vectorii de poziţie ai punctelor m şi M în raport cu O':

$$\mathbf{a} = \mathbf{O'm} \quad , \quad \mathbf{A} = \mathbf{O'M}$$

După cum s-a arătat, pentru ca fotograma F să fie orientată trebuie ca vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{A}$ să fie coliniari, adică:

$$\mathbf{A} = \lambda\, \mathbf{a}\,, \tag{3.1}$$

unde λ este un factor de proporţionalitate, ţinând seama de mărimea diferită a celor doi vectori (având aceeaşi origine, direcţie şi sens).

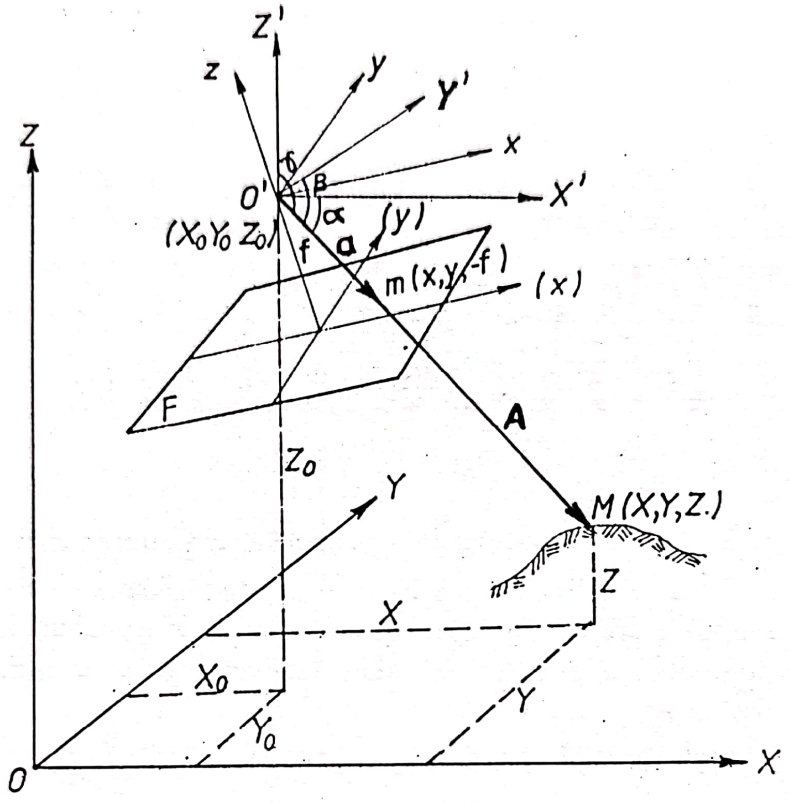

Figura 3.1. Condiţia de coliniaritate.

Pentru a obţine expresia analitică a relaţiei vectoriale (3.1), se vor reprezenta matriceal componentele celor doi vectori în raport cu sistemul de coordonate *OXYZ*:

$$A=\begin{pmatrix} X-X_o \\ Y-Y_o \\ Z-Z_o \end{pmatrix} \quad , \quad a=R\begin{pmatrix} x \\ y \\ -f \end{pmatrix},$$

unde R este matriceea de rotaţie a sistemului fotogramei ($O'xyz$) faţă de sistemul $O'X'Y'Z'$ (paralel cu $OXYZ$), iar x,y sunt coordonatele-imagine reduse şi corectate (conform celor prezentate în capitolul anterior), motiv pentru care vor fi notate în continuare cu x',y'.

Prin urmare, **condiţia de coliniaritate** (3.1) se poate scrie sub forma:

$$\begin{pmatrix} X-X_o \\ Y-Y_o \\ Z-Z_o \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -f \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

sau

$$X - X_o = \lambda R x \,, \tag{3.3}$$

după cum se arată în paragraful A.2.2.

Eliminând factorul de proporţionalitate λ prin împărţirea primei şi a celei de a doua relaţii din (3.2) la a treia, se obţin **ecuaţiile condiţiei de coliniaritate:**

$$\begin{cases} \dfrac{X-X_o}{Z-Z_o} = \dfrac{r_{11}x'+r_{12}y'-r_{13}f}{r_{31}x'+r_{32}y'-r_{33}f} \\ \dfrac{Y-Y_o}{Z-Z_o} = \dfrac{r_{21}x'+r_{22}y'-r_{23}f}{r_{31}x'+r_{32}y'-r_{33}f} \end{cases} . \tag{3.4}$$

Dacă se notează cu R_1, R_2, R_3 liniile matricei R şi cu x' vectorul coordonatelor-imagine corectate :

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} \quad , \quad x' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -f \end{pmatrix},$$

relaţiile (3.4) devin :

$$\begin{cases} \dfrac{X-X_o}{Z-Z_o} = \dfrac{R_1 x'}{R_3 x'} \\ \dfrac{Y-Y_o}{Z-Z_o} = \dfrac{R_2 x'}{R_3 x'} \end{cases} , \tag{3.5}$$

sau

$$\begin{cases} X - X_o = (Z-Z_o)\dfrac{R_1 x'}{R_3 x'} \\ Y - Y_o = (Z-Z_o)\dfrac{R_2 x'}{R_3 x'} \end{cases} . \tag{3.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, relaţiile (3.4), respectiv sub forma (3.5) sau (3.6), exprimă condiţia ca un punct din teren (M), imaginea sa pe fotogramă (m) şi centrul de perspectivă (O') să fie coliniare şi reprezintă **ecuaţiile de bază ale perspectivei centrale.**

Aceste relaţii se pot scrie şi sub formă inversă, pornind de la relaţia (3.3), de unde se poate deduce :

$$x' = \frac{1}{\lambda} R^{\mathrm{T}} (X - X_o) \ , \tag{3.7}$$

având în vedere că $R^{-1}=R^{\mathrm{T}}$ în cazul matricelor ortogonale (v. paragraful A.2.2).

Procedând similar cazului anterior, **ecuaţiile condiţiei de coliniaritate** se vor obţine sub forma:

$$\begin{cases} \dfrac{x'}{-f} = \dfrac{r_{11}(X-X_o)+r_{21}(Y-Y_o)+r_{31}(Z-Z_o)}{r_{13}(X-X_o)+r_{23}(Y-Y_o)+r_{33}(Z-Z_o)} \\ \dfrac{y'}{-f} = \dfrac{r_{12}(X-X_o)+r_{22}(Y-Y_o)+r_{32}(Z-Z_o)}{r_{13}(X-X_o)+r_{23}(Y-Y_o)+r_{33}(Z-Z_o)} \end{cases} \tag{3.8}$$

Dacă se notează cu $R_1^{\mathrm{T}}, R_2^{\mathrm{T}}, R_3^{\mathrm{T}}$ liniile matricei R^{T} şi cu $X-X_o$ vectorul cu componentele $X-X_o, Y-Y_o, Z-Z_o$:

$$R^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} R_1^{\mathrm{T}} \\ R_2^{\mathrm{T}} \\ R_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \quad , \quad X - X_o = \begin{pmatrix} X-X_o \\ Y-Y_o \\ Z-Z_o \end{pmatrix},$$

relaţiile (3.8) devin:

$$\begin{cases} \dfrac{x'}{-f} = \dfrac{R_1^{\mathrm{T}}(X-X_o)}{R_3^{\mathrm{T}}(X-X_o)} \\ \dfrac{y'}{-f} = \dfrac{R_2^{\mathrm{T}}(X-X_o)}{R_3^{\mathrm{T}}(X-X_o)} \end{cases} , \tag{3.9}$$

sau

$$\begin{cases} x' = -f \dfrac{R_1^{\mathrm{T}}(X-X_o)}{R_3^{\mathrm{T}}(X-X_o)} \\ y' = -f \dfrac{R_2^{\mathrm{T}}(X-X_o)}{R_3^{\mathrm{T}}(X-X_o)} \end{cases} . \tag{3.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceste ecuaţii (sub forma (3.8), (3.9) sau (3.10)) exprimă ca şi cele obţinute anterior (3.4), (3.5) sau (3.6) legătura dintre coordonatele unui punct M din teren şi coordonatele imaginii sale m pe fotogramă, prin intermediul a **6 parametri de orientare exterioară** (presupunând cunoscute elementele de orientare interioară) şi anume:

- **3 rotaţii** (ω, φ, κ) care determină matricea de rotaţie R şi
- **3 translaţii** (X_o, Y_o, Z_o) reprezentând coordonatele centrului de perspectivă al fotogramei (în sistemul $OXYZ$).

Pentru determinarea acestor 6 parametri sunt necesare cel puţin 3 puncte (necoliniare) având coordonatele-teren şi coordonatele-imagine cunoscute.

După obţinerea parametrilor de orientare, relaţiile (3.8) permit calcularea coordonatelor x',y' cunoscând coordonatele-teren X,Y,Z, iar relaţiile (3.4) permit calcularea coordonatelor plane X,Y cunoscând coordonatele-imagine x',y' şi cota Z pentru fiecare punct. În consecinţă, aceste relaţii se utilizează îndeosebi pentru terenuri plane, când cota Z se poate considera constantă în toate punctele, dar şi în cazul zonelor accidentate, când cota Z se poate obţine pe baza modelului numeric (digital) al terenului.

3.2. Forme particulare ale ecuaţiilor condiţiei de coliniaritate

În **cazul unui teren plan şi orizontal**, mărimea Z fiind constantă, dacă se notează cu H înălţimea relativă de zbor ($H=Z_o-Z$), relaţiile (3.4) devin:

$$\begin{cases} X - X_o = -H\dfrac{r_{11}x' + r_{12}y' - r_{13}f}{r_{31}x' + r_{32}y' - r_{33}f} \\ Y - Y_o = -H\dfrac{r_{21}x' + r_{22}y' - r_{23}f}{r_{31}x' + r_{32}y' - r_{33}f} \end{cases} . \tag{3.11}$$

După o grupare corespunzătoare şi prin împărţirea cu ultimul termen rezultat la numitor, se obţine:

$$\begin{cases} X = \dfrac{a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}}{a_{31}x' + a_{32}y' + 1} \\ Y = \dfrac{a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}}{a_{31}x' + a_{32}y' + 1} \end{cases} . \tag{3.12}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceste relaţii exprimă o **transformare omografică** (proiectivă) între două plane (planul fotogramei şi planul terenului) şi sunt identice în principiu cu (A.66), diferind doar unele notaţii. După cum se arată în paragraful A.3.2, această transformare conţine 8 parametri independenţi şi este determinată de 4 perechi de puncte corespondente, cu condiţia ca 3 să fie necoliniare. Trebuie remarcat însă că aici nu mai intervin parametrii de orientare interioară, deci transformarea se face fără reconstituirea fasciculului iniţial şi de aceea numărul de puncte cerut este mai mare.

În unele aplicaţii (de exemplu la **calibrarea camerei**) poate fi utilă exprimarea ecuaţiilor condiţiei de coliniaritate în funcţie de cosinusurile directoare ale vectorului **A** (fig. 3.1) în raport cu sistemul $OXYZ$ (respectiv cu $O'X'Y'Z'$, paralel cu acesta):

$$\cos\alpha = \cos\left(O'M, O'X'\right) = \frac{X - X_o}{O'M} \quad ,$$

$$\cos\beta = \cos\left(O'M, O'Y'\right) = \frac{Y - Y_o}{O'M} \quad ,$$

$$\cos\gamma = \cos\left(O'M, O'Z'\right) = \frac{Z - Z_o}{O'M} \quad .$$

După cum se observă, acestea sunt proporţionale cu $X\text{-}X_o$, $Y\text{-}Y_o$, $Z\text{-}Z_o$ şi prin urmare ecuaţiile (3.8) se pot scrie sub forma:

$$\begin{cases} \dfrac{x'}{-f} = \dfrac{r_{11}\cos\alpha + r_{21}\cos\beta + r_{31}\cos\gamma}{r_{13}\cos\alpha + r_{23}\cos\beta + r_{33}\cos\gamma} \\ \dfrac{y'}{-f} = \dfrac{r_{12}\cos\alpha + r_{22}\cos\beta + r_{32}\cos\gamma}{r_{13}\cos\alpha + r_{23}\cos\beta + r_{33}\cos\gamma} \end{cases} \quad . \tag{3.13}$$

O altă situaţie particulară o constituie **cazul fotogramelor nadirale** ($\omega=\varphi=0$) şi orientate în plan ($\kappa = 0$). Matricea de rotaţie R (respectiv R^T) se transformă în matrice unitate I şi prin urmare relaţiile (3.4) vor deveni:

$$\begin{cases} \dfrac{X - X_o}{Z - Z_o} = \dfrac{x^o}{-f} \\ \dfrac{Y - Y_o}{Z - Z_o} = \dfrac{y^o}{-f} \end{cases} \quad . \tag{3.14}$$

unde cu x^o,y^o s-au notat coordonatele pe fotograma nadirală.

Scanned with OKEN Scanner

Comparând egalităţile (3.14) cu (3.4), rezultă:

$$\begin{cases} x^o = -f\dfrac{r_{11}x'+r_{12}y'-r_{13}f}{r_{31}x'+r_{32}y'-r_{33}f} \\ y^o = -f\dfrac{r_{21}x'+r_{22}y'-r_{23}f}{r_{31}x'+r_{32}y'-r_{33}f} \end{cases} . \tag{3.15}$$

Aceste relaţii exprimă legătura dintre coordonatele x',y' ale unui punct pe fotograma înclinată şi coordonatele x^o,y^o ale aceluiaşi punct pe fotograma nadirală corespunzătoare.

3.3. Forma diferenţială a ecuaţiilor condiţiei de coliniaritate

După cum se poate remarca, ecuaţiile condiţiei de coliniaritate, atât în forma (3.4) cât şi în forma (3.8), nu sunt liniare în raport cu cei 6 parametri de orientare exterioară. Ele vor putea fi liniarizate prin dezvoltare în serie Taylor, reţinând doar termenii de primul ordin diferenţial. Pentru aceasta, va fi convenabil ca relaţiile (3.4) să fie exprimate ca două funcţii identic nule, reprezentate prin determinanţi de ordinul doi:

$$\begin{cases} F_1 \equiv \begin{vmatrix} X-X_o & Z-Z_o \\ r_{11}x'+r_{12}y'-r_{13}f & r_{31}x'+r_{32}y'-r_{33}f \end{vmatrix} = 0 \\ F_2 \equiv \begin{vmatrix} Y-Y_o & Z-Z_o \\ r_{21}x'+r_{22}y'-r_{23}f & r_{31}x'+r_{32}y'-r_{33}f \end{vmatrix} = 0 \end{cases} . \tag{3.16}$$

În acest caz, liniarizarea se va putea face, după cum se arată în paragraful B.2.4, printr-o relaţie de forma (B.41):

$$F_i\left(X_o^o+dX_o, Y_o^o+dY_o, Z_o^o+dZ_o, \omega^o+d\omega, \varphi^o+d\varphi, \kappa^o+d\kappa\right)=$$

$$=F_i\left(X_o^o, Y_o^o, Z_o^o, \omega^o, \varphi^o, \kappa^o\right)+\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_o}\right)^o dX_o+\left(\frac{\partial F}{\partial Y_o^i}\right)^o dY_o+\left(\frac{\partial F}{\partial Z_o^i}\right)^o dZ_o+ \quad (3.17)$$

$$+\left(\frac{\partial F_i}{\partial \omega}\right)^o d\omega+\left(\frac{\partial F_i}{\partial \varphi}\right)^o d\varphi+\left(\frac{\partial F_i}{\partial \kappa}\right)^o d\kappa+ \ \ldots\ldots \ (i=1,2),$$

unde indicele superior " ^{o} " face referirea la valori aproximative.

Pentru exprimarea derivatelor parţiale în raport cu mărimile unghiulare (ω,φ,κ) se vor avea în vedere derivatele parţiale ale matricei de rotaţie R în raport cu aceste mărimi (pentru valorile iniţiale nule) date de (B.30),(B.31) şi (B.32). De asemenea, pentru aceleaşi valori iniţiale nule, se poate considera $R^o=I$ (matricea unitate).

Ţinând seama de modul în care se definesc derivatele parţiale ale unui determinant (funcţiile F_1 şi F_2 fiind exprimate prin determinanţi), adică aplicând formula (B.40), rezultă:

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial X_o}\right)^o=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ x' & -f\end{vmatrix}=f, \quad \left(\frac{\partial F_2}{\partial X_o}\right)^o=\begin{vmatrix}0 & 0\\ y' & -f\end{vmatrix}=0,$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial Y_o}\right)^o=\begin{vmatrix}0 & 0\\ x' & -f\end{vmatrix}=0, \quad \left(\frac{\partial F_2}{\partial Y_o}\right)^o=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ y' & -f\end{vmatrix}=f,$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial Z_o}\right)^o=\begin{vmatrix}0 & 1\\ x' & -f\end{vmatrix}=x', \quad \left(\frac{\partial F_2}{\partial Z_o}\right)^o=\begin{vmatrix}0 & -1\\ y' & -f\end{vmatrix}=y',$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial \omega}\right)^o=\begin{vmatrix}(X-X_o)^o & (Z-Z_o)^o\\ 0 & y'\end{vmatrix}=(X-X_o)^o y',$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial \omega}\right)^o=\begin{vmatrix}(Y-Y_o)^o & (Z-Z_o)^o\\ f & y'\end{vmatrix}=(Y-Y_o)^o y'-(Z-Z_o)^o f,$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial \varphi}\right)^o=\begin{vmatrix}(X-X_o)^o & (Z-Z_o)^o\\ -f & -x'\end{vmatrix}=-\left((X-X_o)^o x'-(Z-Z_o)^o f\right),$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial \varphi}\right)^o = \begin{vmatrix} (Y-Y_o)^o & (Z-Z_o)^o \\ 0 & -x' \end{vmatrix} = -(Y-Y_o)^o x' ,$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial \kappa}\right)^o = \begin{vmatrix} (X-X_o)^o & (Z-Z_o)^o \\ -y' & 0 \end{vmatrix} = (Z-Z_o)^o y' ,$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial \kappa}\right)^o = \begin{vmatrix} (Y-Y_o)^o & (Z-Z_o)^o \\ x' & 0 \end{vmatrix} = -(Z-Z_o)^o x' .$$

Pe de altă parte,

$$F_1\left(X_o^o, Y_o^o, Z_o^o, \omega^o, \varphi^o, \kappa^o\right) = \begin{vmatrix} (X-X_o)^o & (Z-Z_o)^o \\ x' & -f \end{vmatrix} = -\left((X-X_o)^o f + (Z-Z_o)^o x'\right),$$

$$F_2\left(X_o^o, Y_o^o, Z_o^o, \omega^o, \varphi^o, \kappa^o\right) = \begin{vmatrix} (Y-Y_o)^o & (Z-Z_o)^o \\ y' & -f \end{vmatrix} = -\left((Y-Y_o)^o f + (Z-Z_o)^o y'\right).$$

Prin urmare, forma liniarizată a ecuaţiilor (3.16) prin dezvoltarea (3.17), scriind însă termenul $F_i(X_o^o, Y_o^o, Z_o^o, \omega^o, \varphi^o, \kappa^o)$ la sfârşit, va fi:

$$\begin{cases} f\,dX_o + x'\,dZ_o + (X-X_o)^o y'\,d\omega - \left((X-X_o)^o x' - (Z-Z_o)^o f\right) d\varphi + (Z-Z_o)^o y'\,d\kappa - \\ \quad -\left((X-X_o)^o f + (Z-Z_o)^o x'\right) = 0 \\ f\,dY_o + y'\,dZ_o + \left((Y-Y_o)^o y' - (Z-Z_o)^o f\right) d\omega - (Y-Y_o)^o x'\,d\varphi - (Z-Z_o)^o x'\,d\kappa - \\ \quad -\left((Y-Y_o)^o f + (Z-Z_o)^o y'\right) = 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Considerând fotogramele nadirale şi terenul aproximativ plan, înălţimea relativă de zbor se poate exprima sub forma:

$$H = m\,f = m^o(1+dm)f = m^o f + m^o f dm = H^o + dH ,$$

unde $H^o=(Z_o-Z)^o$, iar $dH=dZ_o$ (Z fiind constant). De asemenea, pe baza relaţiilor (3.14) dar aproximând x^o, y^o cu x', y' se poate scrie:

$$(X-X_o)^o = -H^o \frac{x'}{-f} = m^o x' \quad , \quad (Y-Y_o)^o = -H^o \frac{y'}{-f} = m^o y' .$$

Ţinând seama de acestea şi împărţind ecuaţiile (3.18) cu f, rezultă:

$$\begin{cases} dX_o + x' m^o dm + \dfrac{m^o x' y'}{f} d\omega - \left(\dfrac{m^o x'^2}{f} + m^o f \right) d\varphi - m^o y' d\kappa - \left(X - X_o^o - m^o x' \right) = 0 \\ dY_o + y' m^o dm + \left(\dfrac{m^o y'^2}{f} + m^o f \right) d\omega - \dfrac{m^o y' x'}{f} d\varphi + m^o x' d\kappa - \left(Y - Y_o^o - m^o y' \right) = 0 . \end{cases}$$

Dacă se introduc notaţiile

$$X_f^o = m^o x', Y_f^o = m^o y', U^o = H^o \left(1 + \left(\frac{X_f^o}{H^o} \right)^2 \right), V^o = \frac{X_f^o Y_f^o}{H^o}, W^o = H^o \left(1 + \left(\frac{Y_f^o}{H^o} \right)^2 \right),$$

forma liniarizată a ecuaţiilor condiţiei de coliniaritate va fi:

$$\begin{cases} dX_o + X_f^o dm + V^o d\omega - U^o d\varphi - Y_f^o d\kappa - \left(X - X_o^o - X_f^o \right) = 0 \\ dY_o + Y_f^o dm + W^o d\omega - V^o d\varphi + X_f^o d\kappa - \left(Y - Y_o^o - Y_f^o \right) = 0 , \end{cases} \tag{3.19}$$

cu observaţia că al doilea termen poate fi exprimat şi sub forma

$$\frac{X_f^o}{H^o} dZ_o \quad , \quad \text{respectiv} \quad \frac{Y_f^o}{H^o} dZ_o .$$

Pe de altă parte, pornind de la relaţiile (3.8) şi procedând similar, se poate obţine o altă expresie a formei liniarizate a ecuaţiilor condiţiei de coliniaritate. Cele două funcţii (F_1 si F_2) vor fi acum:

$$\begin{cases} F_1 \equiv \begin{vmatrix} x' & -f \\ r_{11}(X-X_o)+r_{21}(Y-Y_o)+r_{31}(Z-Z_o) & r_{13}(X-X_o)+r_{23}(Y-Y_o)+r_{33}(Z-Z_o) \end{vmatrix} = 0 \\ F_2 \equiv \begin{vmatrix} y' & -f \\ r_{12}(X-X_o)+r_{22}(Y-Y_o)+r_{32}(Z-Z_o) & r_{13}(X-X_o)+r_{23}(Y-Y_o)+r_{33}(Z-Z_o) \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

Liniarizarea se va face pe baza aceleiaşi formule (3.17), dar la exprimarea derivatelor parţiale în raport cu mărimile unghiulare se va avea în vedere că acum intervine matricea de rotaţie transpusă R^T şi prin urmare vor trebui considerate transpusele matricelor (B.30), (B.31) şi (B.32). Cu această observaţie, derivatele parţiale din (3.17) vor avea forma:

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial X_o}\right)^o = \begin{vmatrix} x' & -f \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -f, \qquad \left(\frac{\partial F_2}{\partial X_o}\right)^o = \begin{vmatrix} y' & -f \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial Y_o}\right)^o = \begin{vmatrix} x' & -f \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \left(\frac{\partial F_2}{\partial Y_o}\right)^o = \begin{vmatrix} y' & -f \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -f,$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial Z_o}\right)^o = \begin{vmatrix} x' & -f \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -x', \qquad \left(\frac{\partial F_2}{\partial Z_o}\right)^o = \begin{vmatrix} y' & -f \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -y',$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial \omega}\right)^o = \begin{vmatrix} x' & -f \\ 0 & -(Y-Y_o)^o \end{vmatrix} = -(Y-Y_o)^o x',$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial \omega}\right)^o = \begin{vmatrix} y' & -f \\ (Z-Z_o)^o & -(Y-Y_o)^o \end{vmatrix} = -(Y-Y_o)^o y' + (Z-Z_o)^o f,$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial \varphi}\right)^o = \begin{vmatrix} x' & -f \\ -(Z-Z_o)^o & (X-X_o)^o \end{vmatrix} = (X-X_o)^o x' - (Z-Z_o)^o f,$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial \varphi}\right)^o = \begin{vmatrix} y' & -f \\ 0 & (X-X_o)^o \end{vmatrix} = (X-X_o)^o y',$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial \kappa}\right)^o = \begin{vmatrix} x' & -f \\ (Y-Y_o)^o & 0 \end{vmatrix} = (Y-Y_o)^o f,$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial \kappa}\right)^o = \begin{vmatrix} y' & -f \\ -(X-X_o)^o & 0 \end{vmatrix} = -(X-X_o)^o f.$$

Pe de altă parte,

$$F_1\left(X_o^o, Y_o^o, Z_o^o, \omega^o, \varphi^o, \kappa^o\right) = \begin{vmatrix} x' & -f \\ (X-X_o)^o & (Z-Z_o)^o \end{vmatrix} = (Z-Z_o)^o x' + (X-X_o)^o f,$$

$$F_2\left(X_o^o, Y_o^o, Z_o^o, \omega^o, \varphi^o, \kappa^o\right) = \begin{vmatrix} y' & -f \\ (Y-Y_o)^o & (Z-Z_o)^o \end{vmatrix} = (Z-Z_o)^o y' + (Y-Y_o)^o f.$$

Scanned with OKEN Scanner

Scriind aceşti termeni la sfârşit, forma liniarizată a ecuaţiilor (3.20) va fi:

$$\begin{cases} -f\,dX_o - x'\,dZ_o - (Y-Y_o)^o\,x'\,d\omega + \left((X-X_o)^o\,x' - (Z-Z_o)^o\,f\right)d\varphi + (Y-Y_o)^o\,f\,d\kappa + \\ \quad + \left((Z-Z_o)^o\,x' + (X-X_o)^o\,f\right) = 0 \\ -f\,dY_o - y'\,dZ_o - \left((Y-Y_o)^o\,y' - (Z-Z_o)^o\,f\right)d\omega + (X-X_o)^o\,y'\,d\varphi - (X-X_o)^o\,f\,d\kappa + \\ \quad + \left((Z-Z_o)^o\,y' + (Y-Y_o)^o\,f\right) = 0. \end{cases}$$

Dacă se împart aceste relaţii cu $-(Z-Z_o)^o=H^o$ şi se ţine seama de (3.14) unde x^o,y^o se aproximează cu x',y' (cu excepţia termenului liber), rezultă:

$$\begin{cases} -\frac{f}{H^o}dX_o - \frac{x'}{H^o}dZ_o - \frac{x'y'}{f}d\omega + f\left(1+\frac{x'^2}{f^2}\right)d\varphi + y'\,d\kappa - \left(x'-x^o\right) = 0 \\ -\frac{f}{H^o}dY_o - \frac{y'}{H^o}dZ_o - f\left(1+\frac{y'^2}{f^2}\right)d\omega + \frac{x'y'}{f}d\varphi - x'\,d\kappa - \left(y'-y^o\right) = 0\,. \end{cases} \qquad (3.21)$$

Trecând în membrul drept termenii liberi ai ecuaţiilor (3.19) şi (3.21) şi notându-i cu *dx, dy* respectiv *dX, dY,* se poate pune în evidenţă influenţa variaţiei elementelor de orientare exterioară asupra coordonatelor-imagine şi asupra coordonatelor-teren.

3.4. Exploatarea independentă a fotogramelor aeriene

După cum s-a precizat anterior, exploatarea independentă a fotogramelor se poate realiza numai în cazul terenurilor plane, când deformaţiile pe fotogramă determinate de diferenţele de nivel din teren pot fi considerate neglijabile. În acest caz, ecuaţiile condiţiei de coliniaritate scrise sub forma (3.16) sau (3.20) vor trebui particularizate pentru $Z-Z_o=-H$. Având în vedere că aceste ecuaţii conţin atât mărimi măsurate cât şi parametri necunoscuţi, pentru determinarea acestor parametri se va utiliza cazul general de compensare prin metoda pătratelor minime (v. paragraful C.2.5). Prin urmare, sistemul de ecuaţii liniarizate va fi de forma (C.133):

$$A\,V + B\,\Delta - W = O\,.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se consideră ca mărimi măsurate atât coordonatele-imagine (corectate) x',y', cât şi coordonatele-teren X,Y, fiecare submatrice A_i (corespunzătoare unui punct i) va fi:

$$A_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x'} & \frac{\partial F_1}{\partial y'} & \frac{\partial F_1}{\partial X} & \frac{\partial F_1}{\partial Y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x'} & \frac{\partial F_2}{\partial y'} & \frac{\partial F_2}{\partial X} & \frac{\partial F_2}{\partial Y} \end{pmatrix}_i^o ,$$

iar matricea A va avea forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_n \end{pmatrix},$$

măsurătorile fiind independente.

Pe de altă parte, submatricea derivatelor parţiale în raport cu cei 6 parametri de orientare exterioară (cu observaţia că în locul translaţiei Z_o va apare, după cum s-a arătat anterior, înălţimea relativă de zbor H) va fi (pentru un punct i):

$$B_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_o} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_o} & \frac{\partial F_1}{\partial H} & \frac{\partial F_1}{\partial \omega} & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_1}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_o} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_o} & \frac{\partial F_2}{\partial H} & \frac{\partial F_2}{\partial \omega} & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_2}{\partial \kappa} \end{pmatrix}_i^o ,$$

iar matricea B va avea forma:

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}.$$

Indicele superior " ^{o} " indică (în cazul ambelor matrice A şi B) particularizarea derivatelor parţiale pentru mărimile măsurate şi valorile aproximative ale parametrilor de orientare.

Având în vedere funcţiile F_1 şi F_2 date de (3.20) şi procedând ca în paragraful anterior, submatricele A_i şi B_i vor arăta astfel:

Scanned with OKEN Scanner

$$A_i = \begin{pmatrix} -H^o & 0 & f & 0 \\ 0 & -H^o & 0 & f \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

$$B_i = \begin{pmatrix} -f & 0 & -x' & -(Y-Y_o)^o x' & (X-X_o)^o x' - (Z-Z_o)^o f & (Y-Y_o)^o f \\ 0 & -f & -y' & -(Y-Y_o)^o y' + (Z-Z_o)^o f & (X-X_o)^o y' & -(X-X_o)^o f \end{pmatrix}_i, \tag{3.23}$$

Pe de altă parte,

$$V_i^T = (v_{x'} \; v_{y'} \; v_X \; v_Y)_i,$$

$$\Delta^T = (dX_o \; dY_o \; dH \; d\omega \; d\varphi \; d\kappa),$$

$$-W_i = \begin{pmatrix} F_1^o \\ F_2^o \end{pmatrix}_i, \quad \text{unde} \quad F_1^o = \begin{vmatrix} x' & -f \\ (X-X_o)^o & -H^o \end{vmatrix}, \quad F_2^o = \begin{vmatrix} y' & -f \\ (Y-Y_o)^o & -H^o \end{vmatrix}.$$

De obicei însă, coordonatele-teren (X,Y) ale punctelor de reper se consideră fixe ($v_X=v_Y=0$) şi în consecinţă submatricea A_i va căpăta o formă diagonală, iar ecuaţiile compensării vor deveni:

$$\begin{cases} -H^o v_{x'} - f\,dX_o - x'\,dH - (Y-Y_o)^o x'\,d\omega + \left((X-X_o)^o x' + H^o f\right)d\varphi + \\ \quad + (Y-Y_o)^o f\,d\kappa - \left(H^o x' - (X-X_o)^o f\right) = 0 \\ -H^o v_{y'} - f\,dY_o - y'\,dH - \left((Y-Y_o)^o y' + H^o f\right)d\omega + (X-X_o)^o y'\,d\varphi - \\ \quad - (X-X_o)^o f\,d\kappa - \left(H^o y' - (Y-Y_o)^o f\right) = 0. \end{cases}$$

Împărţind aceste relaţii cu $H^o=-(Z-Z_o)^o$, ţinând seama de (3.14) unde x^o,y^o se aproximează cu x',y' (cu excepţia termenului liber) şi trecând corecţiile măsurătorilor în membrul drept, rezultă:

$$\begin{cases} -\frac{f}{H^o}dX_o - \frac{x'}{H^o}dH - \frac{x'y'}{f}d\omega + f\left(1+\frac{x'^2}{f^2}\right)d\varphi + y'\,d\kappa - \left(x'-x^o\right) = v_{x'} \\ -\frac{f}{H^o}dY_o - \frac{y'}{H^o}dH - f\left(1+\frac{y'^2}{f^2}\right)d\omega + \frac{x'y'}{f}d\varphi - x'\,d\kappa - \left(y'-y^o\right) = v_{y'}. \end{cases} \tag{3.24}$$

După cum se poate observa, relaţiile (3.24) diferă de ecuaţiile (3.21) doar prin membrul drept unde apar acum corecţiile $v_{x'}$ şi $v_{y'}$.

Scanned with OKEN Scanner

La un rezultat similar se poate ajunge însă şi pe altă cale, pe baza egalităţilor (3.10) prin care mărimile măsurate x',y' sunt exprimate în funcţie de cei 6 parametri de orientare:

$$\begin{cases} x'+v_{x'} = F_1(X_o, Y_o, Z_o, \omega, \varphi, \kappa) \\ y'+v_{y'} = F_2(X_o, Y_o, Z_o, \omega, \varphi, \kappa). \end{cases} \tag{3.25}$$

Acest caz este specific măsurătorilor indirecte (v.paragraful C.2.2). Deoarece funcţiile F_1 şi F_2 nu sunt liniare în raport cu parametrii necunoscuţi, ele vor trebui liniarizate prin dezvoltare în serie Taylor (neglijând termenii de ordinul II şi superior) utilizând relaţia (C.65) sub forma (3.17).

Având în vedere forma în care se prezintă funcţiile F_1 şi F_2:

$$F_1 = -f\frac{R_1^{\mathrm{T}}(X-X_o)}{R_3^{\mathrm{T}}(X-X_o)}\ ,\quad F_2 = -f\frac{R_2^{\mathrm{T}}(X-X_o)}{R_3^{\mathrm{T}}(X-X_o)}\ . \tag{3.26}$$

şi ţinând seama de modul în care se derivează fracţiile, se pot obţine derivatele parţiale:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \xi} = -\frac{f}{\left(R_3^{\mathrm{T}}(X-X_o)\right)^2}\left(\frac{\partial\left(R_1^{\mathrm{T}}(X-X_o)\right)}{\partial \xi}\left(R_3^{\mathrm{T}}(X-X_o)\right) - \frac{\partial\left(R_3^{\mathrm{T}}(X\ \ X_o)\right)}{\partial \xi}\left(R_1^{\mathrm{T}}(X-X_o)\right)\right),$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \xi} = -\frac{f}{\left(R_3^{\mathrm{T}}(X-X_o)\right)^2}\left(\frac{\partial\left(R_2^{\mathrm{T}}(X-X_o)\right)}{\partial \xi}\left(R_3^{\mathrm{T}}(X-X_o)\right) - \frac{\partial\left(R_3^{\mathrm{T}}(X\ \ X_o)\right)}{\partial \xi}\left(R_2^{\mathrm{T}}(X-X_o)\right)\right),$$

unde ξ reprezintă notaţia generică a celor 6 parametri de orientare.

Dacă se scriu aceste relaţii în formă mai convenabilă, utilizând determinanţi, şi se particularizează pentru valorile aproximative ale necunoscutelor, rezultă:

Scanned with OKEN Scanner

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial \xi}\right)^o = -\frac{f}{\left(\left(R_3^{\mathrm{T}}(X-X_o)\right)^o\right)^2}\begin{vmatrix}\left(\dfrac{\partial\left(R_1^{\mathrm{T}}(X-X_o)\right)}{\partial \xi}\right)^o & \left(\dfrac{\partial\left(R_3^{\mathrm{T}}(X-X_o)\right)}{\partial \xi}\right)^o \\ \left(R_1^{\mathrm{T}}(X-X_o)\right)^o & \left(R_3^{\mathrm{T}}(X-X_o)\right)^o\end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{-f}{\left((Z-Z_o)^o\right)^2}\begin{vmatrix}\left(\dfrac{\partial\left(R_1^{\mathrm{T}}(X-X_o)\right)}{\partial \xi}\right)^o & \left(\dfrac{\partial\left(R_3^{\mathrm{T}}(X-X_o)\right)}{\partial \xi}\right)^o \\ (X-X_o)^o & (Z-Z_o)^o\end{vmatrix},$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial \xi}\right)^o = -\frac{f}{\left(\left(R_3^{\mathrm{T}}(X-X_o)\right)^o\right)^2}\begin{vmatrix}\left(\dfrac{\partial\left(R_2^{\mathrm{T}}(X-X_o)\right)}{\partial \xi}\right)^o & \left(\dfrac{\partial\left(R_3^{\mathrm{T}}(X-X_o)\right)}{\partial \xi}\right)^o \\ \left(R_2^{\mathrm{T}}(X-X_o)\right)^o & \left(R_3^{\mathrm{T}}(X-X_o)\right)^o\end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{-f}{\left((Z-Z_o)^o\right)^2}\begin{vmatrix}\left(\dfrac{\partial\left(R_2^{\mathrm{T}}(X-X_o)\right)}{\partial \xi}\right)^o & \left(\dfrac{\partial\left(R_3^{\mathrm{T}}(X-X_o)\right)}{\partial \xi}\right)^o \\ (Y-Y_o)^o & (Z-Z_o)^o\end{vmatrix}.$$

Ca şi în cazul liniarizării relaţiilor (3.20), pentru determinarea derivatelor parţiale în raport cu mărimile unghiulare se vor considera transpusele matricelor (B.30), (B.31) şi (B.32).

Pe de altă parte, presupunând fotogramele nadirale şi particularizând funcţiile F_1 şi F_2 (3.26) pentru valorile aproximative ale parametrilor, rezultă:

$$F_1^o = -f\frac{(X-X_o)^o}{(Z-Z_o)^o} = -f\frac{x^o}{-f} = x^o,$$

$$F_2^o = -f\frac{(Y-Y_o)^o}{(Z-Z_o)^o} = -f\frac{y^o}{-f} = y^o,$$

conform relaţiilor (3.14)

Având în vedere acestea şi concretizând derivatele parţiale ale funcţiilor F_1 şi F_2 în raport cu cei 6 parametri de orientare, se vor obţine relaţii similare cu (3.24). Totuşi, spre deosebire de acestea, coeficienţii corecţiilor necunoscute vor conţine valorile calculate în locul valorilor măsurate ale coordonatelor-imagine.

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte, deoarece relaţiile sunt aproximative (fiind obţinute prin liniarizare), cei 6 parametri de orientare se vor determina într-un proces iterativ pe baza unor valori aproximative iniţiale. Notând cu i indicele corespunzător iteraţiei, ecuaţiile de corecţii vor avea forma:

$$\begin{cases} -\dfrac{f}{H^{i-1}}dX_o^i - \dfrac{x^{i-1}}{H^{i-1}}dH^i - \dfrac{x^{i-1}y^{i-1}}{f}d\omega^i + f\left(1+\dfrac{\left(x^{i-1}\right)^2}{f^2}\right)d\varphi^i + \\ \qquad + y^{i-1}d\kappa^i - \left(x'-x^{i-1}\right) = v_{x'} \\ -\dfrac{f}{H^{i-1}}dY_o^i - \dfrac{y^{i-1}}{H^{i-1}}dH^i - f\left(1+\dfrac{\left(y^{i-1}\right)^2}{f^2}\right)d\omega^i + \dfrac{x^{i-1}y^{i-1}}{f}d\varphi^i - \\ \qquad - x^{i-1}d\kappa^i - \left(y'-y^{i-1}\right) = v_{y'} \end{cases} \tag{3.27}$$

Aceste relaţii se pot scrie simplificat astfel:

$$\begin{aligned} x^{i-1} + \Delta x^i &= x' + v_{x'}, \\ y^{i-1} + \Delta y^i &= y' + v_{y'}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

unde în membrul stâng apar mărimile calculate şi corecţiile lor, iar în membrul drept mărimile măsurate şi corecţiile corespunzătoare.

Având în vedere că pentru fiecare punct se pot scrie câte două ecuaţii de forma (3.27), cele 6 corecţii necunoscute se vor obţine pe baza unui număr de puncte, $n>3$, având coordonatele-imagine şi coordonatele-teren cunoscute (pentru a se asigura măsurători suplimentare). După cum s-a arătat în paragraful 3.1, trei din aceste puncte de sprijin trebuie să fie necoliniare.

Aplicând principiul pătratelor minime sistemului format din ecuaţiile corespunzătoare tuturor punctelor de sprijin, se obţine sistemul de ecuaţii normale (C.69) având soluţia (C.70). Va rezulta astfel vectorul conţinând valorile cele mai probabile ale corecţiilor celor 6 parametri de orientare exterioară (Δ).

Aceste corecţii se aplică aproximaţiilor anterioare. Translaţiile se corectează aditiv:

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{aligned} X_o^i &= X_o^{i-1} + dX_o^i \ , \\ Y_o^i &= Y_o^{i-1} + dY_o^i \ , \\ H^i &= H^{i-1} + dH^i \ , \end{aligned} \tag{3.29}$$

iar rotaţiile, multiplicativ:

$$R^i = dR^i \, R^{i-1} \ . \tag{3.30}$$

unde dR^i este matricea ortogonală (ce nu trebuie confundată cu matricea diferenţială notată similar) obţinută pe baza valorilor $d\omega^i, d\varphi^i, d\kappa^i$ sub forma (A.32) de exemplu, sau în oricare din formele prezentate în paragraful A.2.2.a.

Cu parametrii corectaţi, se determină noi valori pentru coordonatele-imagine calculate folosind relaţii de tipul (3.10):

$$\begin{cases} x^i = -f \dfrac{\left(R_1^T\right)^i \left(X - X_o^i\right)}{\left(R_3^T\right)^i \left(X - X_o^i\right)} \\ y^i = -f \dfrac{\left(R_2^T\right)^i \left(X \quad X_o^i\right)}{\left(R_3^T\right)^i \left(X - X_o^i\right)} \ . \end{cases} \tag{3.31}$$

Se va putea forma acum un nou sistem de ecuaţii, în locul mărimilor cu indicele *i-1* din (3.27), introducând valorile corectate în iteraţia *i*. În urma prelucrării prin metoda pătratelor minime, se va obţine un nou set de corecţii pentru cei 6 parametri de orientare, care se pot aplica valorilor din iteraţia anterioară cu relaţiile (3.29), (3.30) şi (3.31).

Iteraţiile se continuă până când corecţiile devin nesemnificative (după cum se arată în paragraful C.2.2.b), de exemplu:

$$\begin{aligned} |d\theta| &\le 10^{-5} \quad (\theta = \omega, \varphi, \kappa), \\ |d\chi| &\le 0{,}1‰ H \quad (\chi = X_o, Y_o, Z_o). \end{aligned} \tag{3.32}$$

În final, având în vedere că s-a aplicat metoda măsurătorilor indirecte, se va putea calcula eroarea medie pătratică a unei singure măsurători pe baza relaţiei (C.82) :

$$\sigma_o = \pm \sqrt{\frac{\left[v_{x'}^2 + v_{y'}^2\right]}{2n-6}} \tag{3.33}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi se vor putea determina erorile medii pătratice ale elementelor de orientare exterioară cu formula (C.83):

$$\sigma_j = \sigma_o \sqrt{q_{jj}} \quad (j = 1,...,6).$$

După cum s-a arătat însă, pentru a se putea începe procesul iterativ vor trebui determinate în prealabil valori aproximative ale celor 6 parametri de orientare. Astfel, presupunând fotograma nadirală, într-o primă aproximaţie înclinările vor putea fi considerate nule: $\omega^o=\varphi^o=0$. Pentru a obţine valori iniţiale pentru ceilalţi 4 parametri, se pot utiliza formulele transformării conforme liniare în plan (A.4):

$$\begin{cases} X = a_o + a_1 x - b_1 y \\ Y = b_o + b_1 x + a_1 y \end{cases}.$$

Cu ajutorul a două puncte de sprijin (cât mai depărtate) se poate forma un sistem de 4 ecuaţii cu 4 necunoscute. Prin rezolvarea acestuia şi ţinând seama de semnificaţiile celor 4 parametri ai transformării (A.3), se pot obţine valorile:

$$X_o^o = a_o \;,\; Y_o^o = b_o \;,\; m^o = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \;,\; H^o = m^o f \;,$$

$$\cos\kappa^o = \frac{a_1}{m^o} \;,\; \sin\kappa^o = \frac{b_1}{m^o} \;,\; R^o = \begin{pmatrix} \cos\kappa^o & -\sin\kappa^o & 0 \\ \sin\kappa^o & \cos\kappa^o & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pentru o mai bună determinare a aproximaţiilor iniţiale, se pot utiliza încă două puncte de sprijin (cele două perechi de puncte fiind recomandabil să fie dispuse aproximativ pe diagonalele fotogramei) şi în consecinţă valorile iniţiale ale parametrilor se vor obţine ca medii aritmetice.

Aceste valori vor servi la formarea ecuaţiilor de corecţii (3.27) pentru prima iteraţie (când $i=1, i-1=0$) şi vor fi corectate succesiv în procesul iterativ până la determinarea elementelor de orientare exterioară cu o precizie satisfăcătoare.

Trebuie remarcat faptul că în cazul în care ω^o şi φ^o nu pot fi considerate nule, dar au valori cunoscute, va trebui aplicată coordonatelor-imagine o rotaţie iniţială R^o (pe baza acestor valori), sau la derivatele parţiale în raport cu rotaţiile (din formulele diferenţiale) să se aibă în vedere penultimele expresii ale matricelor (B.30), (B.31) şi (B.32).

După cum s-a arătat în paragraful 1.2.2, după determinarea parametrilor de orientare pe baza unor puncte de sprijin (având cunoscute atât coordonatele-imagine, cât şi coordonatele-teren), aceşti parametri vor permite obţinerea coordonatelor-teren pentru un număr (oricât de mare) de puncte ale căror imagini au fost identificate şi măsurate pe fotogramă. Pentru aceasta se pot folosi relaţiile

Scanned with OKEN Scanner

(3.11) cu observaţia că translaţiile X_o şi Y_o vor fi trecute în membrul drept. Trebuie precizat că se utilizează valorile definitive ale parametrilor de orientare, adică:

$$X_o = X_o^o + \sum_{i=1}^{u} dX_o^i ,$$

$$Y_o = Y_o^o + \sum_{i=1}^{u} dY_o^i ,$$

$$H = H^o + \sum_{i=1}^{u} dH^i ,$$

$$R = R^u R^{u-1} \dots R^1 R^o ,$$

u fiind ultima iteraţie.

Coordonatele-teren se pot obţine însă şi prin transformarea succesivă a coordonatelor-imagine ale acestor puncte odată cu transformarea iterativă a punctelor de sprijin.

Dacă în locul coordonatelor-imagine ale unui punct se utilizează parametrii directori ai razei corespunzătoare (3.34) din fasciculul fotogrammetric (v.fig. 3.2):

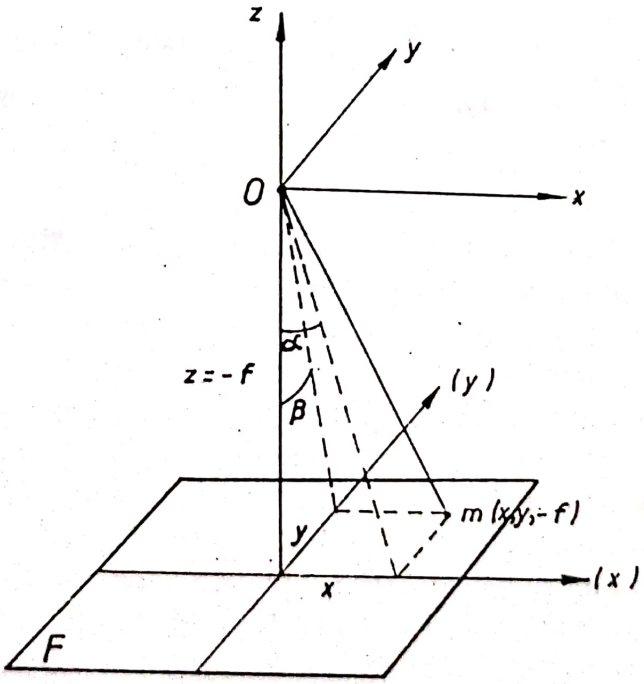

Figura 3.2. Definirea parametrilor directori ai unei raze.

$$u = tg\alpha = \frac{x}{z} = \frac{x}{-f} \quad , \quad v = tg\beta = \frac{y}{z} = \frac{y}{-f} \quad , \quad w = \frac{z}{z} = 1 \quad , \qquad (3.34)$$

ecuaţiile de corecţii vor avea forma:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{H^{i-1}}dX_o^i - \dfrac{u^{i-1}}{H^{i-1}}dH^i + u^{i-1}v^{i-1}d\omega^i - \left(1+\left(u^{i-1}\right)^2\right)d\varphi^i + v^{i-1}d\kappa^i - \left(u'-u^{i-1}\right) = v_{u'} \\ \dfrac{1}{H^{i-1}}dY_o^i - \dfrac{v^{i-1}}{H^{i-1}}dH^i + \left(1+\left(v^{i-1}\right)^2\right)d\omega^i - u^{i-1}v^{i-1}d\varphi^i - u^{i-1}d\kappa^i - \left(v'-v^{i-1}\right) = v_{v'} \end{cases} \quad (3.35)$$

rezultând prin împărţirea relaţiilor (3.27) cu *-f*. Prin urmare,

$$v_{u'}=v_{x'}/(-f),\ v_{v'}=v_{y'}/(-f).$$

Parametrii directori u' şi v' vor fi consideraţi ca mărimi măsurate în compensare, presupunând de asemenea că aceste pseudo-observaţii au variante şi covariante similare măsurătorilor propriu-zise (x',y').

Dacă se notează:

$$dX''^i_o = dX^i_o / H^{i-1},\ dY''^i_o = dY^i_o / H^{i-1},\ dH''^i = dH^i / H^{i-1},$$

sistemul (3.35) va deveni:

$$\begin{cases} dX''^i_o - u^{i-1}dH''^i + u^{i-1}v^{i-1}d\omega^i - \left(1+\left(u^{i-1}\right)^2\right)d\varphi^i + v^{i-1}d\kappa^i - \left(u'-u^{i-1}\right) = v_{u'} \\ dY''^i_o - v^{i-1}dH''^i + \left(1+\left(v^{i-1}\right)^2\right)d\omega^i - u^{i-1}v^{i-1}d\varphi^i - u^{i-1}d\kappa^i - \left(v'-v^{i-1}\right) = v_{v'} \end{cases} \quad (3.36)$$

având coeficienţii omogenizaţi din punct de vedere numeric. Evident însă, după obţinerea soluţiilor sistemului normal corespunzător, mărimile $dX''^i_o, dY''^i_o, dH''^i$ vor trebui multiplicate cu H^{i-1}, pentru a obţine valorile corecţiilor dX_o^i, dY_o^i, dH^i.

În rest, procesul iterativ se desfăşoară similar cu cel descris anterior, cu observaţia că din relaţiile (3.31), în locul coordonatelor-imagine x^i,y^i, se determină parametrii directori $u^i=x^i/(-f)$, $v^i=y^i/(-f)$. De asemenea, dacă se notează

$$\sigma'_o = \pm\sqrt{\frac{\left[v_{u'}^2 + v_{v'}^2\right]}{2n-6}},$$

se poate obţine eroarea medie pătratică σ_o (3.33) cu relaţia:

$$\sigma_o = f\,\sigma'_o .$$

Trebuie remarcat că în toate dezvoltările anterioare (din acest capitol), elementele de orientare interioară s-au presupus cunoscute exact. Totuşi, mărimile acestor elemente (date de exemplu de firma constructoare) pot fi considerate ca valori aproximative ce pot fi corectate în procesul iterativ (împreună cu elementele de orientare exterioară). Pentru aceasta, în relaţiile (3.8), respectiv sub forma

Scanned with OKEN Scanner

(3.20), coordonatele-imagine x',y' care s-au presupus reduse la punctul principal şi corectate de influenţa distorsiunii obiectivului vor fi completate acum cu termenii corespunzători acestor elemente (punctul principal nemaifiind asimilat cu punctul mijlociu):

$$\begin{aligned} x' &\to x' - x_p - \Delta x, \\ y' &\to y' - y_p - \Delta y, \end{aligned} \tag{3.37}$$

unde x_p,y_p sunt coordonatele punctului principal în raport cu punctul mijlociu (x' şi y' fiind reduse la punctul mijlociu), iar Δx, Δy sunt corecţiile de distorsiune (radială şi tangenţială) date de relaţiile (2.25). În consecinţă, la liniarizarea funcţiilor F_1 şi F_2 (3.20) va trebui să se ţină seama şi de parametrii corespunzători orientării interioare (x_p,y_p,f şi cei 7 coeficienţi ai funcţiilor de distorsiune). Dacă se iau în consideraţie doar primii 3 parametri (x_p,y_p,f), compensarea se poate realiza prin metoda măsurătorilor indirecte, relaţiile (3.25) devenind:

$$\begin{cases} x' + v_{x'} = F_1\,(x_p,y_p,f,X_o,Y_o,Z_o,\omega,\varphi,\kappa) \\ y' + v_{y'} = F_2\,(x_p,y_p,f,X_o,Y_o,Z_o,\omega,\varphi,\kappa)\,. \end{cases} \tag{3.38}$$

Dacă se introduc însă şi parametrii corespunzători distorsiunii, modelul nu mai este liniar în raport cu mărimile măsurate şi prin urmare compensarea se va face conform cazului general (v.paragraful C.2.5). În plus, spre deosebire de situaţia anterioară când doar parametrii se corectează iterativ, acum vor trebui corectate şi mărimile măsurate.

De asemenea, trebuie facută distincţie între funcţiile F_1,F_2 din (3.25),(3.26) sau (3.38) care depind numai de parametrii de orientare şi funcţiile (notate la fel) F_1,F_2 din (3.16) sau (3.20) depinzând atât de parametri cât şi de mărimile măsurate. Totuşi, când aceste funcţii sunt liniare în raport cu observaţiile (mărimile măsurate), rezultatele sunt similare, ecuaţiile putând fi aduse la aceeaşi formă (după cum se poate observa comparând (3.24) cu (3.27)), iar corectarea iterativă se poate limita la parametri.

Pe de altă parte, se poate menţiona că în cazul calibrării camerei, la determinarea parametrilor de orientare interioară poate fi mai convenabil să se utilizeze ecuaţiile condiţiei de coliniaritate sub forma (3.13); coordonatele măsurate x',y' (reduse la punctul mijlociu) fiind completate cu termenii corespunzători elementelor de orientare interioară, după cum se arată în (3.37).

Scanned with OKEN Scanner

4. ORIENTAREA EXTERIOARĂ A PERECHILOR DE FOTOGRAME

În cazul terenurilor accidentate, influenţa reliefului asupra poziţiilor punctelor-imagine (v.paragraful 2.8) nu mai poate fi neglijată şi în consecinţă fotogramele nu mai pot fi exploatate independent. Aceste deplasări ale imaginilor punctelor pe fotograme cauzate de diferitele lor poziţii altimetrice în teren vor permite însă reconstituirea spaţială a terenului utilizând perechi de fotograme cu acoperire stereoscopică.

Având în vedere că orientarea exterioară a unei fotograme este definită de 6 parametri, în cazul unei stereograme numărul parametrilor de orientare va fi (evident) 12. Determinarea acestora se poate face mai convenabil în două etape şi anume:

(1) **orientarea relativă** sau reciprocă a celor două fotograme implicând **5 parametri** şi în urma căreia se poate obţine modelul stereoscopic (corespunzător zonei de dublă acoperire) la o scară arbitrară şi într-o poziţie arbitrară;

(2) **orientarea absolută** a stereomodelului în raport cu sistemul de coordonate-teren, implicând **7 parametri.**

4.1. Orientarea relativă

Problema care se pune aici constă în esenţă în reconstituirea poziţiei reciproce a celor două fotograme, astfel încât perechile de raze conjugate să se intersecteze, rezultând modelul stereoscopic corespunzător zonei comune celor

Scanned with OKEN Scanner

două fotograme (fig. 4.1). Pentru aceasta, după cum se ştie din geometria proiectivă (v.paragraful A.3.3), va trebui asigurată intersecţia a cel puţin 5 perechi de raze corespondente astfel alese încât din punctele rezultate 4 să nu fie coplanare şi 3 să nu fie coliniare. În această situaţie, toate celelalte perechi de raze se vor intersecta şi se va obţine stereomodelul, care în cazul exploatării analitice va fi un model numeric. Trebuie precizat că în cazul aplicării metodei pătratelor minime, numărul de puncte va trebui să fie $n>5$ şi se recomandă utilizarea celor 6 puncte caracteristice (fig. 4.1) ca dispunere minimală, fiind posibilă evident şi folosirea unor puncte suplimentare sau chiar a tuturor punctelor măsurate din stereograma respectivă. Această ultimă soluţie prezintă avantajul determinării simultane a coordonatelor compensate ale tuturor punctelor din stereomodel.

Pe de altă parte, se poate remarca faptul că orientarea relativă se realizează doar pe baza unor puncte corespondente identificate pe cele două imagini conjugate, în această etapă nefiind necesare puncte de sprijin din teren.

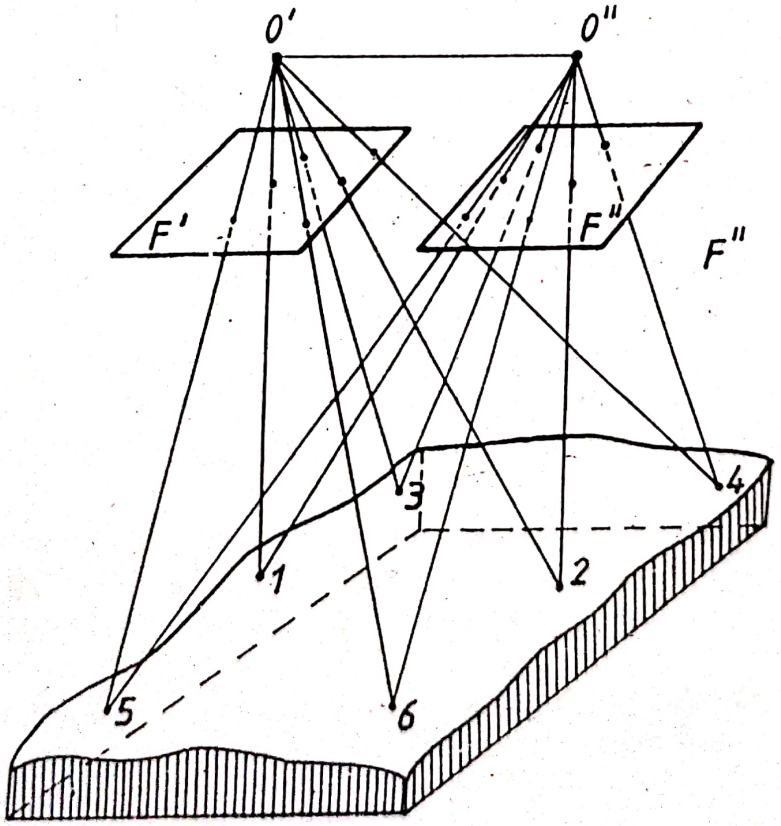

Figura 4.1. Orientarea relativă.

Scanned with OKEN Scanner

4.1.1. CONDIŢIA DE COPLANARITATE

Fie două fotograme conjugate F' şi F'' (fig. 4.2) având sistemele de coordonate $O'x'y'z'$, respectiv $O''x''y''z''$, şi un punct m al stereomodelului (cu coordonatele x,y,z în sistemul acestuia) obţinut cu ajutorul razelor corespunzătoare imaginilor $m'(x',y',z')$ şi $m''(x'',y'',z'')$, presupunând fotogramele orientate reciproc. Dacă se notează cu **b** vectorul **O'O"** corespunzător bazei de proiecţie, având componentele b_x,b_y,b_z în sistemul de coordonate al stereomodelului ($Oxyz$), se poate scrie:

$$b=\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x''_o-x'_o \\ y''_o-y'_o \\ z''_o-z'_o \end{pmatrix}, \qquad (4.1)$$

unde x'_o, y'_o, z'_o şi x''_o, y''_o, z''_o sunt coordonatele centrelor de perspectivă O' şi O'' în acelaşi sistem ($Oxyz$).

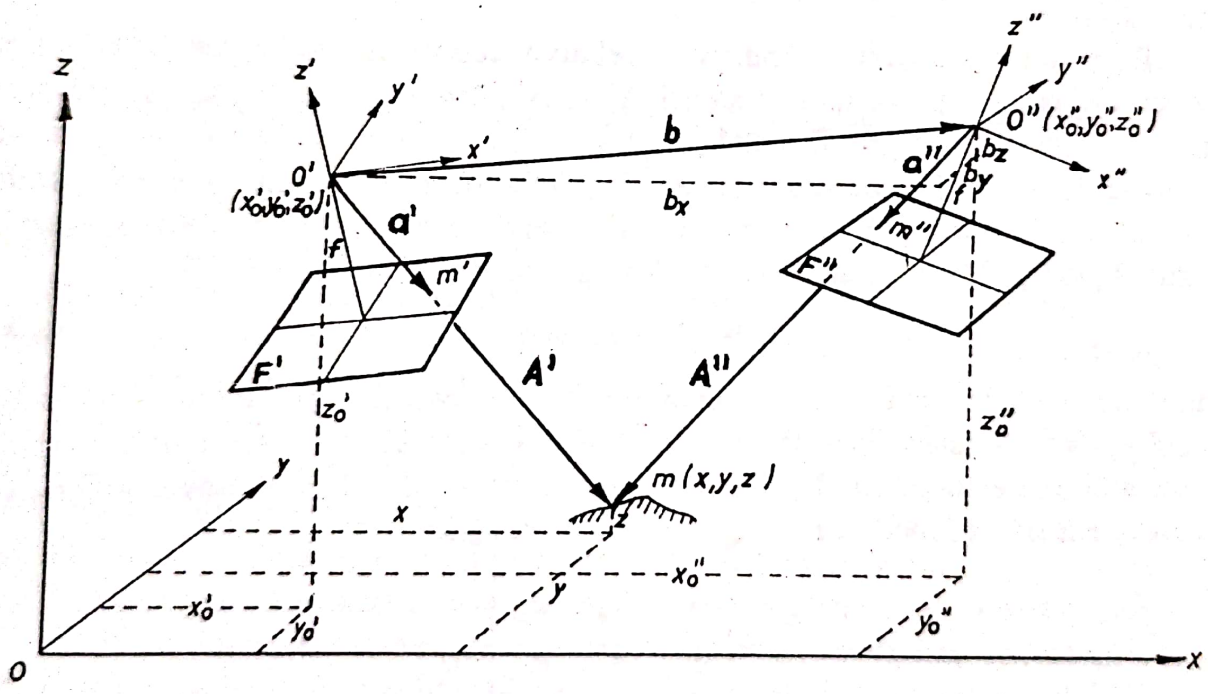

Figura 4.2. Condiţia de coplanaritate.

Ca şi în cazul condiţiei de coliniaritate (v.paragraful 3.1), se vor nota cu **A'**, **a'** şi **A"**, **a"** vectorii de poziţie ai punctului m şi ai imaginilor m' şi m'' în raport cu cele două centre de proiecţie (O', respectiv O''):

$$\mathbf{A'=O'm} \quad , \quad \mathbf{a'=O'm'} \ ,$$
$$\mathbf{A''=O''m} \quad , \quad \mathbf{a''=O''m''} \ .$$

De asemenea, similar condiției de coliniaritate (3.1), relațiile dintre vectorii **A′**, **A"** și **a′** respectiv **a"** se pot scrie sub forma:

$$\mathbf{A}'=\lambda'\mathbf{a}' ,$$
$$\mathbf{A}''=\lambda''\mathbf{a}''$$

și se pot exprima matriceal în raport cu sistemul de coordonate *Oxyz*:

$$A'=\begin{pmatrix}A'_x\\A'_y\\A'_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x'_o\\y-y'_o\\z-z'_o\end{pmatrix}=\lambda' a'=\lambda' R'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

$$A''=\begin{pmatrix}A''_x\\A''_y\\A''_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x''_o\\y-y''_o\\z-z''_o\end{pmatrix}=\lambda'' a''=\lambda'' R''\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

R' și R'' fiind matricele de rotație ale celor două fotograme față de sistemul stereomodelului.

După cum s-a arătat, orientarea relativă constă în realizarea intersecției razelor conjugate. Prin urmare, vectorii **A′** și **A"**, reprezentând o pereche de raze corespondente (ce nu pot fi paralele), vor trebui să fie coplanari pentru a se intersecta. În acest plan va trebui să se afle și vectorul bazei **b** care unește originile *O′* și *O"* ale vectorilor **A′** și respectiv **A"**. Condiția de coplanaritate a acestor 3 vectori (**b**, **A′** și **A"**) se poate scrie sub forma produsului mixt nul:

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{A}'\times\mathbf{A}''=0 \tag{4.4}$$

având în vedere semnificația geometrică a acestuia și anume: volumul paralelipipedului determinat de cei 3 vectori este nul când vectorii sunt coplanari. Pentru a obține ecuația condiției de coplanaritate, se va utiliza expresia analitică a produsului mixt în funcție de componentele vectorilor:

$$\begin{vmatrix}b_x & b_y & b_z\\A'_x & A'_y & A'_z\\A''_x & A''_y & A''_z\end{vmatrix}=0 . \tag{4.5}$$

Ținând seama de relațiile (4.2) și (4.3), ecuația (4.5) se poate scrie sub forma:

$$\lambda'\lambda''\begin{vmatrix}b_x & b_y & b_z\\R'_1x' & R'_2x' & R'_3x'\\R''_1x'' & R''_2x'' & R''_3x''\end{vmatrix}=0 ,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde R'_1,R'_2,R'_3 şi R''_1,R''_2,R''_3 sunt liniile matricelor de rotaţie R' şi respectiv R'', iar cu x' şi x'' s-au notat vectorii corespunzători coordonatelor-imagine x',y',z' respectiv x'',y'',z''. Deoarece $\lambda' \neq 0$ şi $\lambda'' \neq 0$, ecuaţia anterioară se va limita la determinant (considerat ca o funcţie F) şi ţinând seama de notaţii rezultă:

$$F \equiv \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ r'_{11}x'+r'_{12}y'+r'_{13}z' & r'_{21}x'+r'_{22}y'+r'_{23}z' & r'_{31}x'+r'_{32}y'+r'_{33}z' \\ r''_{11}x''+r''_{12}y''+r''_{13}z'' & r''_{21}x''+r''_{22}y''+r''_{23}z'' & r''_{31}x''+r''_{32}y''+r''_{33}z'' \end{vmatrix} = 0 \,. \quad (4.6)$$

Ecuaţia orientării relative a fost dedusă şi sub alte forme, punând condiţia ca:

- minimul distanţei dintre razele corespondente să fie zero;
- paralaxa transversală în spaţiul-model să fie egală cu zero (după cum se procedează la orientarea relativă optico-mecanică);
- paralaxa transversală în spaţiul-imagine (în anumite condiţii) să fie nulă.

Totuşi, în fotogrammetria analitică s-a impus condiţia de coplanaritate exprimată prin ecuaţia (4.5) ca bază matematică a orientării relative.

4.1.2. FORMA LINIARIZATĂ A ECUAŢIEI CONDIŢIEI DE COPLANARITATE

Trebuie remarcat la început că deşi în figura 4.2 sistemul de coordonate-model a fost reprezentat distinct de sistemele celor două fotograme, de obicei el este ales cu originea în punctul O' (considerat fix) şi deci translaţiile se vor reduce la cele 3 componente ale bazei (b_x,b_y,b_z). În plus, dintre acestea, ca elemente de orientare relativă se pot lua doar b_y şi b_z, deoarece b_x poate fi ales arbitrar influenţând doar scara modelului, element ce va interveni la orientarea absolută. Adăugând cele 6 rotaţii (corespunzătoare celor două fotograme), vor rezulta 8 elemente, dintre care se vor alege cei 5 parametri de orientare relativă.

După cum se poate observa, ecuaţia condiţiei de coplanaritate (4.6) nu este liniară în raport cu aceste elemente. Pentru liniarizare se poate utiliza dezvoltarea în **serie Taylor**, la care se neglijează termenii diferenţiali de ordinul doi şi superior, pe baza relaţiei (B.41):

Scanned with OKEN Scanner

$$F\left(\omega'^{o}+d\omega',\varphi'^{o}+d\varphi',\kappa'^{o}+d\kappa',\omega''^{o}+d\omega'',\varphi''^{o}+d\varphi'',\kappa''^{o}+d\kappa'',b_y^o+db_y,b_z^o+db_z\right)=$$

$$=F\left(\omega'^{o},\varphi'^{o},\kappa'^{o},\omega''^{o},\varphi''^{o},\kappa''^{o},b_y^o,b_z^o\right)+\left(\frac{\partial F}{\partial\omega'}\right)^{o}d\omega'+\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\right)^{o}d\varphi'+\left(\frac{\partial F}{\partial\kappa'}\right)^{o}d\kappa'+$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial\omega''}\right)^{o}d\omega''+\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi''}\right)^{o}d\varphi''+\left(\frac{\partial F}{\partial\kappa''}\right)^{o}d\kappa''+\left(\frac{\partial F}{\partial b_y}\right)^{o}db_y+\left(\frac{\partial F}{\partial b_z}\right)^{o}db_z+\ldots=0\ .$$

(4.7)

Pentru exprimarea derivatelor parţiale în raport cu mărimile unghiulare (ω',φ',κ' respectiv $\omega'',\varphi'',\kappa''$) se vor avea în vedere derivatele parţiale ale matricei de rotaţie R în raport cu aceste mărimi (pentru valorile iniţiale nule) date de (B.30), (B.31) şi (B.32). De asemenea, pentru aceleaşi valori iniţiale nule, se observă că $R'^{o}=R''^{o}=I$ (matricea unitate).

Ţinând seama de modul în care se definesc derivatele parţiale ale unui determinant (funcţia F fiind exprimată printr-un determinant), adică aplicând formula (B.40), rezultă:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial\omega'}\right)^{o}=\begin{vmatrix}b_x & b_y & b_z\\ 0 & -z' & y'\\ x'' & y'' & z''\end{vmatrix}=-b_x\left(z'z''+y'y''\right)+b_yy'x''+b_zz'x''$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\right)^{o}=\begin{vmatrix}b_x & b_y & b_z\\ z' & 0 & -x'\\ x'' & y'' & z''\end{vmatrix}=b_xx'y''-b_y\left(z'z''+x'x''\right)+b_zz'y''$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial\kappa'}\right)^{o}=\begin{vmatrix}b_x & b_y & b_z\\ -y' & x' & 0\\ x'' & y'' & z''\end{vmatrix}=b_xx'z''+b_yy'z''-b_z\left(y'y''+x'x''\right)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial\omega''}\right)^{o}=\begin{vmatrix}b_x & b_y & b_z\\ x' & y' & z'\\ 0 & -z'' & y''\end{vmatrix}=b_x\left(y'y''+z'z''\right)-b_yx'y''-b_zx'z''$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi''}\right)^{o}=\begin{vmatrix}b_x & b_y & b_z\\ x' & y' & z'\\ z'' & 0 & -x''\end{vmatrix}=-b_xy'x''+b_y\left(x'x''+z'z''\right)-b_zy'z''\qquad(4.8)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \kappa''}\right)^o = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ x' & y' & z' \\ -y'' & x'' & 0 \end{vmatrix} = -b_x z' x'' - b_y z' y'' + b_z (x' x'' + y' y'')$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial b_y}\right)^o = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = -x' z'' + z' x''$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial b_z}\right)^o = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = x' y'' - y' x''$$

Pe de altă parte,

$$F\left(\omega'^o, \varphi'^o, \kappa'^o, \omega''^o, \varphi''^o, \kappa''^o, b_y^o, b_z^o\right) = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \tag{4.9}$$

$$= b_x (y' z'' - z' y'') - b_y (x' z'' - z' x'') + b_z (x' y'' - y' x'')$$

După cum s-a menţionat anterior, orientarea relativă este determinată de 5 parametri, care pot fi aleşi în două moduri distincte, definind:

a - **orientarea relativă în serie**, când una dintre fotograme (de obicei cea din stânga) se consideră fixată, elementele de orientare referindu-se la cealaltă fotogramă: $b_y, b_z, \omega'', \varphi'', \kappa''$;

b - **orientarea relativă independentă**, când componentele b_y şi b_z ale bazei sunt egale cu zero (axa x fiind aleasă de-a lungul bazei), elementele de orientare fiind 5 din cele 6 rotaţii (una din înclinările ω' sau ω'' fiind considerată nulă): φ', κ', ω'', φ'', κ''.

4.1.3. ORIENTAREA RELATIVĂ ÎN SERIE

Presupunând că elementele de orientare se referă la fotograma din dreapta şi deci fotograma din stânga se consideră fixată, sistemul de coordonate-model ($Oxyz$) poate fi ales în coincidenţă cu sistemul $O'x'y'z'$ (fig.4.2) şi în consecinţă $R' = I$ şi $z' = -f$. În acest caz, relaţia (4.2) va deveni

Scanned with OKEN Scanner

$$A' = \lambda' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -f \end{pmatrix},$$

iar ecuaţia condiţiei de coplanaritate (4.6) se va scrie sub forma

$$F \equiv \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ x' & y' & -f \\ r''_{11}x''+r''_{12}y''+r''_{13}z'' & r''_{21}x''+r''_{22}y''+r''_{23}z'' & r''_{31}x''+r''_{32}y''+r''_{33}z'' \end{vmatrix} = 0 \quad (4.10)$$

Având în vedere că această ecuaţie conţine atât mărimi măsurate cât şi parametri necunoscuţi, pentru determinarea acestor parametri se va utiliza cazul general de compensare prin metoda pătratelor minime (v.paragraful C.2.5). Prin urmare, sistemul de ecuaţii liniarizate va fi de forma (C.133):

$$A\,V + B\,\Delta - W = O\ .$$

Dacă se consideră că mărimi măsurate coordonatele-imagine (corectate) x',y' şi x'',y'' corespunzătoare celor două fotograme (deşi la majoritatea aparatelor două dintre acestea se determină prin intermediul paralaxelor), fiecare submatrice A_i (corespunzătoare unui punct i) va fi:

$$A_i = \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial F}{\partial x''} \frac{\partial F}{\partial y''} \right)^o_i ,$$

iar matricea A va avea forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_n \end{pmatrix},$$

măsurătorile fiind independente.

Având în vedere forma funcţiei F (4.10) şi relaţia (B.40) pe baza căreia se calculează derivatele parţiale ale unui determinant, rezultă:

$$a_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right)^o = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ 1 & 0 & 0 \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = -b_y z'' + b_z y''$$

$$a_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^o = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ 0 & 1 & 0 \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = b_x z'' - b_z x''$$

$$a_3 = \left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)^o = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ x' & y' & -f \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -b_y f - b_z y' \qquad (4.11)$$

$$a_4 = \left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)^o = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ x' & y' & -f \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = b_x f + b_z x' \ .$$

Pe de altă parte, submatricea derivatelor parțiale în raport cu cei 5 parametri de orientare (ω'', φ'', κ'', b_y, b_z) va fi (pentru un punct *i*):

$$B_i = \left(\frac{\partial F}{\partial \omega''} \frac{\partial F}{\partial \varphi''} \frac{\partial F}{\partial \kappa''} \frac{\partial F}{\partial b_y} \frac{\partial F}{\partial b_z}\right)_i^o ,$$

iar matricea B va avea forma:

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} .$$

Particularizând derivatele parțiale (4.8) pentru orientarea relativă în serie ($z' = -f$), rezultă:

$$b_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial \omega''}\right)^o = b_x\left(y' y'' - f z''\right) - b_y x' y'' - b_z x' z''$$

$$b_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi''}\right)^o = -b_x y' x'' + b_y\left(x' x'' - f z''\right) - b_z y' z''$$

$$b_3 = \left(\frac{\partial F}{\partial \kappa''}\right)^o = b_x f x'' + b_y f y'' + b_z\left(x' x'' + y' y''\right) \qquad (4.12)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$b_4 = \left(\frac{\partial F}{\partial b_y}\right)^o = -x'z'' - f x''$$

$$b_5 = \left(\frac{\partial F}{\partial b_z}\right)^o = x'y'' - y'x'' \ .$$

De asemenea, termenul liber corespunzător ecuației unui punct se obține prin particularizarea relației (4.9) pentru $z' = -f$:

$$-w = b_x(y'z'' + f y'') - b_y(x'z'' + f x'') + b_z(x'y'' - y'x'') \ . \qquad (4.13)$$

Având în vedere că vectorul corecțiilor mărimilor măsurate are (pentru un punct i) 4 componente:

$$V_i^T = (v_{x'}\ v_{y'}\ v_{x''}\ v_{y''})_i \ ,$$

iar vectorul corecțiilor parametrilor de orientare este

$$\Delta^T = (d\omega''\ \ d\varphi''\ \ d\kappa''\ \ db_y\ \ db_z),$$

pentru fiecare punct i se poate scrie o ecuație de forma:

$$a_{1i}v_{x'_i} + a_{2i}v_{y'_i} + a_{3i}v_{x''_i} + a_{4i}v_{y''_i} + b_{1i}d\omega'' + b_{2i}d\varphi'' + b_{3i}d\kappa'' + b_{4i}db_y + b_{5i}db_z - w_i = 0 \ . \qquad (4.14)$$

Notând cu n numărul punctelor ale căror coordonate-imagine au fost măsurate, matricele care definesc sistemul de ecuații liniarizate vor avea următoarele dimensiuni:

$$\underset{(n,4n)}{A} \cdot \underset{(4n,1)}{V} + \underset{(n,5)}{B} \cdot \underset{(5,1)}{\Delta} - \underset{(n,1)}{W} = \underset{(n,1)}{O} \ .$$

Se poate observa de asemenea că pentru $n>5$ puncte, condițiile precizate în paragraful C.2.5 sunt îndeplinite ($n<4n+5$ și $5<n$), iar numărul gradelor de libertate este $n-5$. Prelucrarea acestui sistem, determinarea corecțiilor necunoscute și calculul preciziilor se realizează, după cum se arată în paragraful menționat, cu observația că $P = I$ (considerând măsurătorile de aceeași precizie).

Totuși, rezolvarea problemei se poate face mai simplu prin "pseudoindirecte" (după cum se arată în [16]), având în vedere modul în care apar submatricele A_i în A. Astfel, deoarece valorile măsurate $(x',y',x'',y'')_i$ și corecțiile lor $(v_{x'},v_{y'},v_{x''},v_{y''})_i$ apar într-o singură ecuație, suma primilor 4 termeni din (4.14) se poate nota

$$a_{1i}v_{x'_i} + a_{2i}v_{y'_i} + a_{3i}v_{x''_i} + a_{4i}v_{y''_i} = -v_i \ , \qquad (4.15)$$

corespunzând unei măsurători fictive cu ponderea rezultând din relația:

$$\frac{1}{p_i} = \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2\right)_i \quad , \tag{4.16}$$

presupunând cele 4 mărimi x',y',x'',y'' cu precizii egale pentru toate punctele. Prin urmare, rezolvarea problemei se va putea face ca în cazul măsurătorilor indirecte, după cum se arată în paragraful C.2.2, echivalând însă notaţiile diferite ale unor matrice pe baza semnificaţiilor lor.

Deoarece ecuaţiile compensării au fost obţinute prin liniarizare, determinarea celor 5 parametri de orientare relativă se va face într-un **proces iterativ**, cuprinzând următoarele etape:

1-calculul coeficienţilor ecuaţiilor de corecţii (4.12) şi a termenilor liberi (4.13); componenta b_x a bazei poate fi aleasă arbitrar, de exemplu $b_x=1$, sau $b_x=p_m$ (media paralaxelor longitudinale ale punctelor măsurate); pentru prima iteraţie se va avea în vedere că $b_y^o=b_z^o=0$ şi se va considera $z''=-f$;

2-determinarea corecţiilor elementelor de orientare ($d\omega'', d\varphi'', d\kappa'', db_y, db_z$) prin rezolvarea sistemului corespunzător de ecuaţii normale;

3-calculul elementelor matricei ortogonale de rotaţie R'' într-una din formele descrise la paragraful A.2.2.a, pe baza valorilor $d\omega'', d\varphi'', d\kappa''$ obţinute (în radiani) în etapa precedentă;

4-aplicarea rotaţiei R'' coordonatelor x'',y'',z'' ale punctelor fotogramei din dreapta:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}^i = R'' \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}^{i-1} = \begin{pmatrix} r''_{11} & r''_{12} & r''_{13} \\ r''_{21} & r''_{22} & r''_{23} \\ r''_{31} & r''_{32} & r''_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}^{i-1} , \tag{4.17}$$

indicele i reprezentând iteraţia;

5-calculul valorilor corectate ale componentelor b_y şi b_z ale bazei:

$$\begin{aligned} b_y^{\,i} &= b_y^{\,i-1} + db_y^{\,i}, \\ b_z^{\,i} &= b_z^{\,i-1} + db_z^{\,i}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

cu observaţia că valorile iniţiale $b_y^o=b_z^o=0$. Procesul iterativ se reia apoi cu etapele descrise, folosind coordonatele x'',y'',z'' transformate prin (4.17) şi valorile b_y,b_z corectate cu (4.18) în iteraţia precedentă. Iteraţiile se opresc când este îndeplinită condiţia:

$$|q| = |y' - y''| \approx \frac{|l|_{max}}{b_x f} \le 0{,}02\,\text{mm} \tag{4.19}$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultând din (4.13) pentru $b_y=b_z=0$, $z''=-f$ şi $w=l$, sau când valorile corecţiilor devin nesemnificative. Numărul iteraţiilor depinde de configuraţia terenului, de calitatea zborului fotogrammetric, precum şi de calitatea aproximaţiei iniţiale. În mod normal, pentru determinarea parametrilor orientării relative sunt necesare 2-4 iteraţii.

Pe de altă parte, trebuie precizat că în cazul aerofotogrammetriei, valorile iniţiale ale tuturor celor 5 parametri de orientare relativă pot fi considerate egale cu zero şi prin urmare procesul iterativ poate începe fără a mai fi necesară vreo altă etapă preliminară.

În final, se poate calcula eroarea medie pătratică a unităţii de pondere cu relaţia:

$$\sigma_o = \pm\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-5}} \tag{4.20}$$

şi se vor putea determina erorile medii pătratice ale celor 5 elemente de orientare relativă cu formula:

$$\sigma_j = \sigma_o\sqrt{q_{jj}} \qquad (j=1, \ldots ,5) \quad . \tag{4.21}$$

În cazul în care se consideră fotograma din dreapta fixată şi se orientează fotograma din stânga în raport cu aceasta, sistemul de coordonate-model se alege în coincidenţă cu sistemul $O''x''y''z''$ (fig. 4.2) şi în consecinţă $R''= I$ şi z''= -f. În acest caz, relaţia (4.3) va deveni

$$A''= \lambda''\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ -f \end{pmatrix},$$

iar ecuaţia condiţiei de coplanaritate (4.6) se va scrie sub forma

$$F \equiv \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ r'_{11}x'+r'_{12}y'+r'_{13}z' & r'_{21}x'+r'_{22}y'+r'_{23}z' & r'_{31}x'+r'_{32}y'+r'_{33}z' \\ x'' & y'' & -f \end{vmatrix} = 0. \tag{4.22}$$

Ţinând seama de aceasta, cele 4 componente ale vectorului A_i vor fi:

$$\begin{aligned} a_1 &= b_y f + b_z y'' \\ a_2 &= -b_x f - b_z x'' \\ a_3 &= b_y z' - b_z y' \\ a_4 &= -b_x z' + b_z x' \ ; \end{aligned} \tag{4.23}$$

componentele vectorului B_i:

$$B_i = \left(\frac{\partial F}{\partial \omega'} \frac{\partial F}{\partial \varphi'} \frac{\partial F}{\partial \kappa'} \frac{\partial F}{\partial b_y} \frac{\partial F}{\partial b_z} \right)_i^o$$

vor avea expresiile (rezultate din (4.8) pentru $z'' = -f$) :

$$\begin{aligned} b_1 &= -b_x(y'y'' - z'f) + b_y y'x'' + b_z z'x'' \\ b_2 &= b_x x'y'' - b_y(x'x'' - z'f) + b_z z'y'' \\ b_3 &= -b_x x'f - b_y y'f - b_z(x'x'' + y'y'') \\ b_4 &= x'f + z'x'' \\ b_5 &= x'y'' - y'x'' \end{aligned} \qquad (4.24)$$

iar termenul liber se va scrie sub forma:

$$-w = -b_x(y'f + z'y'') + b_y(x'f + z'x'') + b_z(x'y'' - y'x'') \ . \qquad (4.25)$$

În ceea ce privește procesul iterativ, se va avea în vedere faptul că cei 5 parametri de orientare sunt acum $d\omega', d\varphi', d\kappa', db_y, db_z$, iar coordonatele care se transformă sunt x', y', z' și deci relația (4.17) va fi înlocuită cu (4.26):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}^i = R' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}^{i-1} = \begin{pmatrix} r'_{11} & r'_{12} & r'_{13} \\ r'_{21} & r'_{22} & r'_{23} \\ r'_{31} & r'_{32} & r'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}^{i-1} \ . \qquad (4.26)$$

Totuși, acest caz poate fi redus la cel anterior, dacă se inversează notațiile referitoare la cele două fotograme adică, notând cu $O'x'y'z'$ sistemul fotogramei din dreapta și cu $O''x''y''z''$ sistemul fotogramei din stânga. Prin urmare, înlocuind în relațiile (4.23), (4.24) și (4.25) x', y', z' respectiv cu x'', y'', z'' și reciproc, se obțin expresiile (4.11), (4.12) și (4.13) (cu semn schimbat) și având în vedere forma ecuației (4.14) este evident că se vor obține aceleași soluții.

În cazul utilizării parametrilor directori (3.34) în locul coordonatelor-imagine, fiecare ecuație de corecții se împarte cu $z'z'' \approx f^2$, și luând $b_x = 1$ coeficienții (4.12) devin:

$$\begin{aligned} b'_1 &= (1 + v'v'') - b_y u'v'' - b_z u' \\ b'_2 &= -v'u'' + b_y(1 + u'u'') - b_z v' \\ b'_3 &= -u'' - b_y v'' + b_z(u'u'' + v'v'') \end{aligned} \qquad (4.27)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$b'_4 = u''-u'$$

$$b'_5 = u'v''-v'u'' \ .$$

Similar, termenul liber (4.13) se va scrie sub forma:

$$-l' = -w/(z'z'') = (v'-v'') - b_y(u'-u'') + b_z(u'v''-v'u'') \ . \qquad (4.28)$$

Procesul iterativ se va desfăşura în acelaşi mod, cu observaţia că în prealabil (înaintea primei etape) vor trebui calculaţi parametrii directori iniţiali u',v',u'',v'' cu relaţiile (3.34), iar în etapa a 4-a în locul coordonatelor x'',y'',z'', se transformă parametrii directori:

$$\begin{pmatrix} u''^* \\ v''^* \\ w''^* \end{pmatrix}^i = R'' \begin{pmatrix} u'' \\ v'' \\ 1 \end{pmatrix}^{i-1} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'' \\ v'' \\ 1 \end{pmatrix}^{i-1} , \qquad (4.29)$$

$$u''^i = \frac{\left(u''^*\right)^i}{\left(w''^*\right)^i} \ , \quad v''^i = \frac{\left(v''^*\right)^i}{\left(w''^*\right)^i} \ . \qquad (4.30)$$

De asemenea, condiţia de oprire a iteraţiilor (4.19) devine:

$$|q| = |y'-y''| \approx |l'|_{max} \cdot f \le 0{,}02\,\text{mm} \ .$$

Desigur, şi corecţia fiecărei măsurători fictive v_i (4.15) se va împărţi cu $z'z'' \approx f^2$ şi în consecinţă, după ce se calculează mai întâi

$$\sigma'_o = \pm\sqrt{\frac{\left[p\left(v/f^2\right)^2\right]}{n-5}} \ , \qquad (4.31)$$

se va putea obţine eroarea medie pătratică a unităţii de pondere cu relaţia:

$$\sigma_o = f^2\sigma'_o \ . \qquad (4.32)$$

Scanned with OKEN Scanner

4.1.4. ORIENTAREA RELATIVĂ INDEPENDENTĂ

La acest mod de orientare, poziția reciprocă a celor două fotograme se determină în raport cu baza, care se alege că axă x a sistemului de coordonate-model, originea acestui sistem fiind punctul O' (fig. 4.2). Prin urmare, în acest caz $b_y=b_z=0$, iar ecuația condiției de coplanaritate (4.6) va deveni:

$$F \equiv \begin{vmatrix} b_x & 0 & 0 \\ r'_{11}x'+r'_{12}y'+r'_{13}z' & r'_{21}x'+r'_{22}y'+r'_{23}z' & r'_{31}x'+r'_{32}y'+r'_{33}z' \\ r''_{11}x''+r''_{12}y''+r''_{13}z'' & r''_{21}x''+r''_{22}y''+r''_{23}z'' & r''_{31}x''+r''_{32}y''+r''_{33}z'' \end{vmatrix} = 0 \quad (4.33)$$

Având în vedere că această ecuație conține atât mărimi măsurate, cât și parametri necunoscuți, pentru determinarea acestor parametri se va utiliza cazul general de compensare prin metoda pătratelor minime (v.paragraful C.2.5). Prin urmare, sistemul de ecuații liniarizate va fi de forma (C.133):

$$A\,V + B\,\Delta - W = O\ .$$

Fără a mai relua considerațiile referitoare la matricea A din paragraful precedent (valabile și aici), trebuie precizat doar că expresiile (4.11) ale celor 4 componente ale vectorului A_i vor trebui actualizate pentru funcția F dată de (4.33):

$$a_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^o = \begin{vmatrix} b_x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0\ ,$$

$$a_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^o = \begin{vmatrix} b_x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = b_x z''\ , \quad (4.34)$$

$$a_3 = \left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)^o = \begin{vmatrix} b_x & 0 & 0 \\ x' & y' & z' \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\ ,$$

$$a_4 = \left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)^o = \begin{vmatrix} b_x & 0 & 0 \\ x' & y' & z' \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -b_x z'\ .$$

De asemenea, având în vedere că în cazul orientării relative independente, parametrii de orientare sunt 5 din cele 6 rotații (de exemplu $\varphi',\kappa',\omega'',\varphi'',\kappa''$), vectorul B_j va avea forma:

Scanned with OKEN Scanner

$$B_i = \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \frac{\partial F}{\partial \kappa'} \frac{\partial F}{\partial \omega''} \frac{\partial F}{\partial \varphi''} \frac{\partial F}{\partial \kappa''} \right)_i^o .$$

Particularizând derivatele parțiale corespunzătoare din (4.8) pentru acest caz ($b_y=b_z=0$), rezultă:

$$b_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \right)^o = b_x x' y'' ,$$

$$b_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial \kappa'} \right)^o = b_x x' z'' ,$$

$$b_3 = \left(\frac{\partial F}{\partial \omega''} \right)^o = b_x \left(y' y'' + z' z'' \right) , \qquad (4.35)$$

$$b_4 = \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi''} \right)^o = -b_x y' x'' ,$$

$$b_5 = \left(\frac{\partial F}{\partial \kappa''} \right)^o = -b_x z' x'' .$$

În mod similar, termenul liber (4.9) devine:

$$-w = b_x (y' z'' - z' y'') . \qquad (4.36)$$

Având în vedere că vectorul corecțiilor mărimilor măsurate (corespunzător unui punct i) are 4 componente:

$$V_i^T = (v_{x'} \; v_{y'} \; v_{x''} \; v_{y''})_i ,$$

iar vectorul corecțiilor parametrilor de orientare este

$$\Delta^T = (d\varphi' \; d\kappa' \; d\omega'' \; d\varphi'' \; d\kappa'') ,$$

pentru fiecare punct i se poate scrie o ecuație de forma:

$$a_{1i} v_{x'_i} + a_{2i} v_{y'_i} + a_{3i} v_{x''_i} + a_{4i} v_{y''_i} + b_{1i} d\varphi' + b_{2i} d\kappa' + b_{3i} d\omega'' + b_{4i} d\varphi'' + b_{5i} d\kappa'' - w_i = 0 . \qquad (4.37)$$

După cum s-a arătat și în paragraful anterior, rezolvarea problemei se poate simplifica dacă se ține seama de faptul că valorile măsurate $(x',y',x'',y'')_i$ și corecțiile lor $(v_{x'},v_{y'},v_{x''},v_{y''})_i$ apar într-o singură ecuație (cea corespunzătoare

Scanned with OKEN Scanner

punctului i). În consecință, folosind notația (4.15) și dezvoltările (4.35) și (4.36), ecuația (4.37) devine:

$$b_x x'_i y''_i d\varphi' + b_x x'_i z''_i d\kappa' + b_x(y'_i y''_i + z'_i z''_i)d\omega'' - b_x y'_i x''_i d\varphi'' - b_x z'_i x''_i d\kappa'' - \\ - b_x(z'_i y''_i - y'_i z''_i) = v_i \ . \qquad (4.38)$$

Aceasta se poate trata ca ecuație de corecții și prelucrarea se va putea face ca în cazul măsurătorilor indircte (v.paragraful C.2.2).

Având în vedere obținerea prin liniarizare a ecuațiilor compensării, determinarea celor 5 parametri de orientare relativă se va face într-un **proces iterativ**, cuprinzând următoarele etape:

1-calculul coeficienților și a termenilor liberi ai ecuațiilor de corecții de forma (4.38) pentru cele n puncte; componenta b_x a bazei poate fi aleasă arbitrar, de ex. $b_x=1$, sau $b_x=p_m$ (media paralaxelor longitudinale ale punctelor măsurate); pentru prima iterație se va considera $z'=z''=-f$;

2-determinarea corecțiilor elementelor de orientare ($d\varphi', d\kappa', d\omega'', d\varphi'', d\kappa''$) prin rezolvarea sistemului corespunzător de ecuații normale;

3-calculul elementelor matricelor ortogonale de rotație R' și R'' într-una din formele descrise la paragraful A.2.2.a, pe baza valorilor $d\varphi', d\kappa'$, respectiv $d\omega'', d\varphi'', d\kappa''$ obținute (în radiani) în etapa precedentă; înclinarea $d\omega'$ se consideră egală cu zero;

4-aplicarea rotațiilor R' și R'' coordonatelor x',y',z', respectiv x'',y'',z'' :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}^i = R' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}^{i-1} \quad , \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}^i = R'' \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}^{i-1} \ . \qquad (4.39)$$

Procesul iterativ se reia apoi cu etapele descrise, folosind coordonatele x',y',z' și x'',y'',z'' transformate cu relațiile (4.39) în iterația precedentă. Iterațiile se opresc când corecțiile elementelor de orientare devin nesemnificative, adică

$$|d\theta| \le 10^{-5} \quad , \quad \theta = \varphi', \kappa', \omega'', \varphi'', \kappa'', \qquad (4.40)$$

sau când valorile termenilor liberi devin suficient de mici.

Ca și în cazul orientării în serie, presupunând fotogramele nadirale, valorile inițiale ale celor 5 parametri de orientare relativă pot fi considerate egale cu zero și prin urmare procesul iterativ poate începe fără a mai fi necesară vreo altă etapă preliminară.

În final, se poate calcula eroarea medie pătratica a unității de pondere cu relația (4.20) și se vor putea determina erorile medii pătratice ale elementelor de orientare cu formula (4.21).

Scanned with OKEN Scanner

În cazul utilizării parametrilor directori (3.34) în locul coordonatelor-imagine, fiecare ecuație de corecții se împarte cu cu $z'z''\approx f^2$ și luând $b_x=1$ coeficienții (4.35) devin:

$$\begin{aligned} b'_1 &= u'v'' \\ b'_2 &= u' \\ b'_3 &= 1+v'v'' \\ b'_4 &= -v'u'' \\ b'_5 &= -u'' \ . \end{aligned} \tag{4.41}$$

Similar, termenul liber (4.36) se va scrie sub forma:

$$-l' = -w/(z'z'') = v' - v'' \ . \tag{4.42}$$

Prin urmare, ecuația (4.38) devine:

$$u'_i v''_i d\varphi' + u'_i d\kappa' + (1+v'_i v''_i) d\omega'' - v'_i u''_i d\varphi'' - u''_i d\kappa'' + (v'_i - v''_i) = \bar{v}_i \ , \tag{4.43}$$

unde $\bar{v}_i = v_i/(z'z'')$.

Procesul iterativ se va desfășura în același mod, cu observația că în prealabil (înaintea primei etape) vor trebui calculați parametrii directori inițiali cu relațiile (3.34), iar în etapa a 4-a, în locul coordonatelor x',y',z' și x'',y'',z'', se transformă parametrii directori corespunzători:

$$\begin{pmatrix} u'^* \\ v'^* \\ w'^* \end{pmatrix}^i = R' \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix}^{i-1} \ , \quad \begin{pmatrix} u''^* \\ v''^* \\ w''^* \end{pmatrix}^i = R'' \begin{pmatrix} u'' \\ v'' \\ 1 \end{pmatrix}^{i-1} \ , \tag{4.44}$$

$$u'^i = \frac{(u'^*)^i}{(w'^*)^i} \ , \quad v'^i = \frac{(v'^*)^i}{(w'^*)^i} \ , \quad u''^i = \frac{(u''^*)^i}{(w''^*)^i} \ , \quad v''^i = \frac{(v''^*)^i}{(w''^*)^i} \ . \tag{4.45}$$

În ceea ce privește eroarea medie pătratică a unității de pondere, aceasta se va putea calcula pe baza relațiilor (4.31) și (4.32).

Scanned with OKEN Scanner

4.2. Formarea stereomodelului numeric

După cum se ştie, în cazul exploatării fotogrammetrice la aparatele analogice de stereorestituţie, după realizarea orientării relative, în aparat se va putea observa modelul stereoscopic al porţiunii din teren cuprinsă în zona de dublă acoperire a stereogramei respective. În cazul exploatării analitice însă, în urma orientării relative se poate obţine un model numeric definit de un număr limitat de puncte, ale căror coordonate se calculează (într-o etapă distinctă) pe baza coordonatelor-imagine corespunzătoare şi a parametrilor de orientare. Această reprezentare analitică a stereomodelului este deci destul de aproximativă (ca formă), dar pe deplin satisfăcătoare când interesează doar un număr limitat de detalii caracteristice (pentru o anumită problemă).

În unele aplicaţii inginereşti poate fi utilă însă determinarea ecuaţiei $z=f(x,y)$ a suprafeţei care "îmbracă" cel mai bine punctele stereomodelului, sau a ecuaţiilor corespunzătoare diferitelor porţiuni ale stereomodelului (cu anumite condiţii de racordare). Pentru aceasta va fi necesară realizarea unui eşantionaj cu o densitate bine stabilită, care să ofere posibilitatea interpolării cu o eroare acceptabilă a oricărui punct din cuprinsul modelului respectiv. Aceste probleme, privind modelul numeric (digital) al terenului, sunt însă destul de complexe şi nu fac obiectul dezvoltărilor din această lucrare.

În continuare se va avea în vedere deci doar situaţia stereomodelului numeric discret (determinat de un anumit număr de puncte) obţinut prin realizarea intersecţiilor perechilor de raze corespondente (fig. 4.1).

4.2.1. CALCULUL COORDONATELOR-MODEL PENTRU O STEREOGRAMĂ

După cum s-a menţionat anterior, spre deosebire de exploatarea analogică, stereomodelul numeric se formează punct cu punct în urma orientării relative, ca etapă distinctă.

Punctele modelului se definesc ca intersecţii ale razelor corespondente. Datorită însă erorilor reziduale ale orientării relative, aceste raze nu se intersectează efectiv. În consecinţă, pentru a defini un punct al stereomodelului, se consideră un plan perpendicular pe axa z (a sistemului de coordonate-model $O'xyz$) astfel încât punctele de intersecţie ale celor două raze omologe cu acest plan (m' respectiv m'') să aibă aceeaşi coordonată x (fig.4.3). Mijlocul segmentului ce uneşte aceste puncte se va defini ca punct al modelului (m).

Scanned with OKEN Scanner

Având în vedere faptul că la ambele moduri de orientare relativă originea sistemului de coordonate-model se consideră în punctul O', coordonatele celor două centre de perspectivă vor fi:

$$x'_o = y'_o = z'_o = 0\,,$$
$$x''_o = b_x\ ,\ y''_o = b_y\ ,\ z''_o = b_z\,.$$

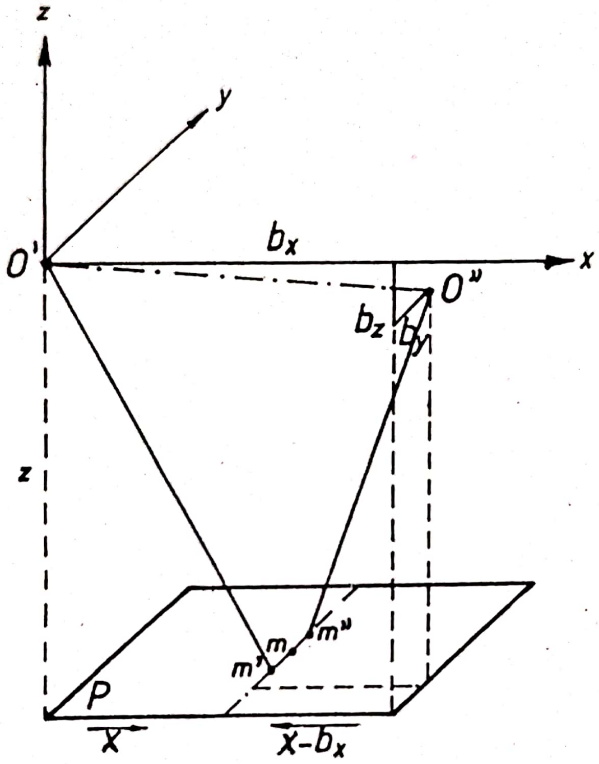

Figura 4.3. Definirea unui punct al stereomodelului.

Pe de altă parte, dacă se notează cu $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$ și $\bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''$ coordonatele-imagine transformate în procesul de orientare relativă:

$$\begin{pmatrix}\bar{x}'\\ \bar{y}'\\ \bar{z}'\end{pmatrix} = R'\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}\ ,\quad \begin{pmatrix}\bar{x}''\\ \bar{y}''\\ \bar{z}''\end{pmatrix} = R''\begin{pmatrix}x''\\ y''\\ z''\end{pmatrix}\ , \tag{4.46}$$

unde

$$R' = (R')^u (R')^{u-1} \ldots (R')^1\ ,\ R'' = (R'')^u (R'')^{u-1} \ldots (R'')^1\ ,$$

u fiind ultima iterație, din relațiile (4.2) și (4.3) rezultă:

$$\begin{aligned} x &= \lambda' \bar{x}'\ ,\\ y &= \lambda' \bar{y}'\ ,\\ z &= \lambda' \bar{z}'\ , \end{aligned} \tag{4.47}$$

respectiv

$$\begin{aligned} x &= b_x + \lambda'' \bar{x}'' \ , \\ y &= b_y + \lambda'' \bar{y}'' \ , \\ z &= b_z + \lambda'' \bar{z}'' \ . \end{aligned} \tag{4.48}$$

Ținând seama de modul în care au fost definite punctele modelului, va trebui ca valorile coordonatelor x și z obținute cu relațiile (4.47) și (4.48) să fie egale, adică:

$$\begin{cases} \lambda' \bar{x}' = b_x + \lambda'' \bar{x}'' \\ \lambda' \bar{z}' = b_z + \lambda'' \bar{z}'' \ , \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \lambda' \bar{x}' - \lambda'' \bar{x}'' = b_x \\ \lambda' \bar{z}' - \lambda'' \bar{z}'' = b_z \ . \end{cases}$$

Prin rezolvarea acestui sistem de două ecuații în raport cu necunoscutele λ' și λ'', rezultă:

$$\lambda' = \frac{b_x \bar{z}'' - b_z \bar{x}''}{\bar{x}' \bar{z}'' - \bar{z}' \bar{x}''} \ , \quad \lambda'' = \frac{b_x \bar{z}' - b_z \bar{x}'}{\bar{x}' \bar{z}'' - \bar{z}' \bar{x}''} \ . \tag{4.49}$$

Cu ajutorul valorilor λ' și λ'' calculate pentru fiecare punct, se pot obține coordonatele x,y,z pe baza relațiilor (4.47) și (4.48). Perechile de valori x și z vor trebui să coincidă (în limitele preciziei de calcul), iar pentru coordonata y se va considera media celor două valori, dacă diferența lor (reprezentând paralaxa transversală reziduală în spațiul-model) nu depășește o anumită toleranță (în funcție de scara modelului). Prin urmare, coordonatele-model se vor obține cu relațiile:

$$\begin{aligned} x &= \lambda' \bar{x}' \ , \\ y &= \left(\lambda' \bar{y}' + \lambda'' \bar{y}'' + b_y \right) / 2 \ , \\ z &= \lambda' \bar{z}' \ . \end{aligned} \tag{4.50}$$

Trebuie remarcat că în cazul orientării relative independente, relațiile (4.49) și (4.50) se vor particulariza pentru $b_y = b_z = 0$.

Pe de altă parte, referitor la relațiile (4.46) trebuie precizat că acestea se vor utiliza în forma prezentată doar pentru punctele care nu au fost folosite la determinarea parametrilor de orientare relativă. Coordonatele punctelor utilizate la orientare sunt transformate succesiv în procesul iterativ și prin urmare, după ultima iterație, vor rezulta coordonatele $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$ și $\bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă în locul coordonatelor-imagine se utilizează parametrii directori (3.34), coordonatele-model se vor obține pe baza valorilor transformate ale acestora $\bar{u}', \bar{v}'$, respectiv $\bar{u}'', \bar{v}''$, calculate în urma ultimei iterații a procesului de orientare relativă cu formulele (4.29), (4.30) în cazul orientării în serie, sau cu formulele (4.44), (4.45) în cazul orientării independente. Trebuie precizat că pentru punctele care nu au fost utilizate în procesul iterativ, aceste relații se aplică o singură dată parametrilor directori inițiali, R' și R'' fiind însă rotațiile totale:

$$R' = (R')^u (R')^{u-1} \dots (R')^1 \quad , \quad R'' = (R'')^u (R'')^{u-1} \dots (R'')^1 \ ,$$

unde cu u s-a notat ultima iterație.

Cu ajutorul figurii (4.3) se pot deduce următoarele relații:

$$\bar{u}' = \frac{x}{z} \ , \tag{4.51}$$

$$\bar{u}'' = \frac{x - b_x}{z - b_z} \ . \tag{4.52}$$

Substituind x din (4.51) în (4.52) se obține formula cu care se va putea calcula z:

$$z = \frac{b_x - \bar{u}'' b_z}{\bar{u}' - \bar{u}''} \ . \tag{4.53}$$

Cunoscând z, se poate determina x pe baza relației (4.51):

$$x = \bar{u}' z \ . \tag{4.54}$$

Similar relațiilor (4.51) și (4.52) se poate scrie:

$$\bar{v}' = \frac{y'}{z} \ , \quad \bar{v}'' = \frac{y'' - b_y}{z - b_z} \ ,$$

y' și y'' fiind ordonatele punctelor m', respectiv m'', ordonata punctului m obținându-se ca medie a acestora:

$$y = \frac{1}{2}\left(z(\bar{v}' + \bar{v}'') + b_y - \bar{v}'' b_z \right) \ . \tag{4.55}$$

Se observă că pentru a determina x și y, va trebui să se obțină întâi mărimea z.

Trebuie remarcat că în cazul orientării relative independente, relațiile (4.53) și (4.55) se vor particulariza pentru $b_y = b_z = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

4.2.2. CALCULUL COORDONATELOR-MODEL ÎN CAZUL TRIPLETELOR

La începutul acestui capitol s-a arătat că în urma orientării relative a unei perechi de fotograme se poate obţine modelul stereoscopic corespunzător zonei de dublă acoperire a fotogramelor (în principiu de 66%). Prin urmare, stereomodelele vor fi de formă dreptunghiulară alungită, iar conexiunea lor (în cadrul procesului de aerotriangulaţie) se va face pe zone înguste, implicând cerinţe suplimentare (după cum se va vedea în paragraful 6.2.3).

Utilizarea tripletelor (adică a 3 fotograme succesive) înlătură acest dezavantaj prin formarea unui stereomodel dublu, corespunzător fotogramei din mijloc (fig. 4.4). În consecinţă, aceste stereomodele vor avea o acoperire longitudinală de aproximativ 66% (ca şi fotogramele) şi vor permite o bună conexiune în lungul benzii.

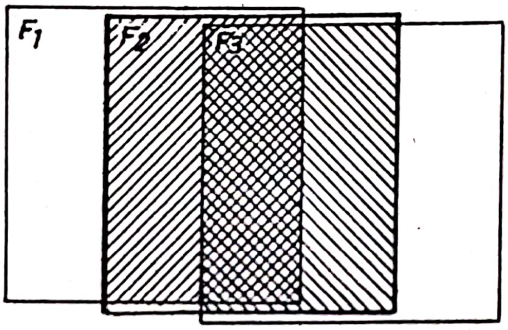

Figura 4.4. Formarea stereomodelului dublu.

Orientarea relativă este preferabil să se execute în acest caz prin metoda descrisă în paragraful 4.1.3, considerând fotograma din mijloc fixă şi determinând elementele de orientare ale fotogramei din stânga şi ale celei din dreapta în raport cu aceasta. După cum s-a arătat în paragraful menţionat, dacă se notează cu $O'x'y'z'$ sistemul fotogramei din mijloc (sistemul de coordonate-model $Oxyz$ fiind ales în coincidenţă cu acesta) şi cu $O''x''y''z''$ sistemul fotogramei din stânga şi apoi cel al fotogramei din dreapta, se pot determina pe baza aceluiaşi algoritm cele două seturi de elemente de orientare. Cu ajutorul acestora se vor putea calcula coordonatele-model corespunzătoare stereogramelor 1-2 şi 2-3 utilizând relaţiile (4.49) şi (4.50), având în vedere că indicele " ' " se referă la fotograma din mijloc.

Trebuie remarcat faptul că cele două stereomodele parţiale vor avea aceeaşi orientare spaţială, dar vor fi la scări diferite. Pentru a le aduce la o scară unică (de exemplu cea a modelului stereoscopic din stânga) se vor două utiliza punctele comune (din zona de triplă acoperire) pentru care s-au determinat câte două valori ale factorului λ' (fig. 4.5), la calculul coordonatelor-model corespunzătoare

stereogramei 1-2 (λ'_1) şi respectiv stereogramei 2-3 (λ'_2). Făcând raportul acestora pentru fiecare punct comun j

$$k_j = \left(\frac{\lambda'_1}{\lambda'_2}\right)_j ,$$

factorul prin care se va realiza transferul scării se obţine ca medie a valorilor corespunzătoare celor n_c puncte comune (dacă diferenţele dintre acestea nu depăşesc o anumită toleranţă):

$$k = \frac{\sum_{j=1}^{n_c} k_j}{n_c} .$$

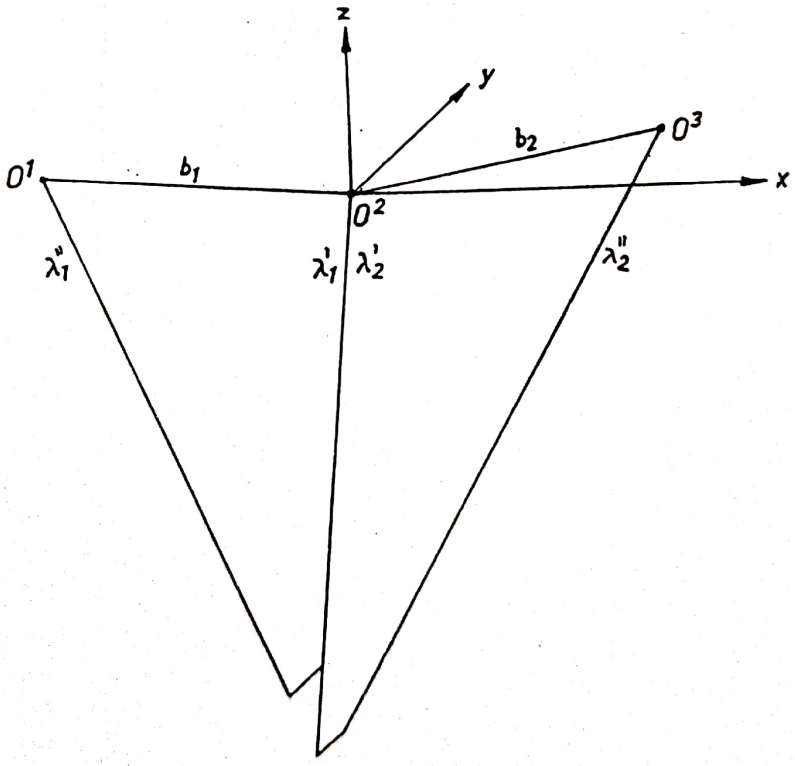

Figura 4.5. Constrângerea în scară.

Cu acest factor se vor multiplica cele 3 componente ale bazei b_2 (fig. 4.5) şi se recalculează λ'_2 şi λ''_2 cu relaţiile (4.49), utilizând aceste valori. Se vor putea obţine acum pe baza formulelor (4.50) coordonatele modelului din dreapta, la aceeaşi scară cu cele corespunzătoare modelului din stânga. Micile diferenţe

Scanned with OKEN Scanner

rezultate în punctele comune şi care nu trebuie să depăşească o anumită toleranţă vor fi mediate, adică se vor considera mediile perechilor corespunzătoare de valori ale coordonatelor acestor puncte.

Trebuie precizat că stereomodelul dublu poate fi obţinut şi pe altă cale şi anume printr-una din cele două metode de aerotriangulaţie analitică pe benzi (v.paragrafele 6.2.1 şi 6.2.2), limitând "banda" la două modele.

4.2.3. DEFORMAŢIILE STEREOMODELULUI

Precizia de determinare a elementelor de orientare relativă este condiţionată de o serie de factori, cei mai importanţi fiind precizia de măsurare a coordonatelor punctelor-imagine şi dispunerea acestor puncte în cadrul stereogramei. Erorile elementelor de orientare relativă implică însă la rândul lor erori ale coordonatelor-model, adică **deformarea stereomodelului.**

Pentru a analiza aceste erori, se vor considera expresiile coordonatelor-model date de relaţiile (4.49) şi (4.50):

$$x = \lambda'\bar{x}' = \frac{b_x\bar{z}'' - b_z\bar{x}''}{\bar{x}'\bar{z}'' - \bar{z}'\bar{x}''}\bar{x}' \,, \tag{4.56}$$

$$y = \frac{\lambda'\bar{y}' + \lambda''\bar{y}'' + b_y}{2} = \frac{\left(b_x\bar{z}'' - b_z\bar{x}''\right)\bar{y}' + \left(b_x\bar{z}' - b_z\bar{x}'\right)\bar{y}''}{2\left(\bar{x}'\bar{z}'' - \bar{z}'\bar{x}''\right)} + \frac{b_y}{2} \,, \tag{4.57}$$

$$z = \lambda'\bar{z}' = \frac{b_x\bar{z}'' - b_z\bar{x}''}{\bar{x}'\bar{z}'' - \bar{z}'\bar{x}''}\bar{z}' \,, \tag{4.58}$$

unde $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$ şi $\bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''$ sunt coordonatele-imagine transformate prin (4.46).

Deformaţiile stereomodelului se reprezintă prin erori dx, dy, dz ale coordonatelor-model, exprimate ca diferenţiale totale de ordinul întâi (de forma B.42) ale acestor funcţii (x,y,z) în raport cu cele 5 elemente de orientare relativă (notate generic cu ξ_j):

$$dF_i = \sum_{j=1}^{5}\left(\frac{\partial F_i}{\partial \xi_j}\right)^{o} d\xi_j \quad (i=1,2,3) \,. \tag{4.59}$$

Prin urmare, $F_1 = x$, $F_2 = y$, $F_3 = z$, iar ca elemente de orientare relativă se consideră $b_y, b_z, \omega'', \varphi'', \kappa''$ având în vedere că în cazul orientării în serie apar atât rotaţii cât şi translaţii, în timp ce la orientarea independentă intervin numai rotaţii.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece derivatele parţiale ale funcţiei $F(\xi_j)$ vor trebui particularizate pentru anumite valori aproximative, se consideră:

$$\begin{aligned} b_x &\approx b \\ b_y \approx b_z &\approx 0 \\ \omega'' \approx \varphi'' \approx \kappa'' &\approx 0 \\ \bar{x}' &\approx x \\ \bar{x}'' &\approx x - b \\ \bar{y}' \approx \bar{y}'' &\approx y \\ \bar{z}' \approx \bar{z}'' &\approx z \end{aligned} \qquad (4.60)$$

presupunând modelul la scara fotogramelor pentru a exprima deformaţiile la această scară. De asemenea, se poate remarca faptul că $\bar{x}'=x'$, $\bar{y}'=y'$, $\bar{z}'=z'$ deoarece în cazul orientării relative în serie, $R'=I$.

Având în vedere că în general deformaţiile altimetrice sunt mai mari decât cele planimetrice (cu excepţia cazului în care se folosesc camere aerofotogrammetrice cu unghi de deschidere foarte mare), vor fi studiate mai în detaliu aceste deformaţii. Pentru aceasta, se vor determina mai întâi derivatele parţiale ale funcţiei $F_3=z$ (4.58) în raport cu cei 5 parametri de orientare, particularizate pentru valorile aproximative (4.60).

Derivatele parţiale în raport cu translaţiile (b_y şi b_z) rezultă direct:

$$\frac{\partial z}{\partial b_y} = 0 \,, \qquad (4.61)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial b_z}\right)^{o} = \left(-\frac{\bar{x}''z'}{x'\bar{z}''-z'\bar{x}''}\right)^{o} = -\frac{(x-b)z}{bz} = 1-\frac{x}{b} \,. \qquad (4.62)$$

Referitor la derivatele parţiale în raport cu rotaţiile (notate generic cu θ) trebuie remarcat că acestea intervin implicit în mărimile $\bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''$, după cum rezultă din (4.46). Prin urmare, se va putea scrie:

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\left(b_x\frac{\partial \bar{z}''}{\partial 0} - b_z\frac{\partial \bar{x}''}{\partial \theta}\right)z'\left(x'\bar{z}''-z'\bar{x}''\right) - \left(b_x\bar{z}''-b_z\bar{x}''\right)z'\left(x'\frac{\partial \bar{z}''}{\partial \theta} - z'\frac{\partial \bar{x}''}{\partial \theta}\right)}{\left(x'\bar{z}''-z'\bar{x}''\right)^2} \,,$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^{o}=\frac{b\left(\frac{\partial \bar{z}''}{\partial \theta}\right)^{o} z^{2}b-bz^{2}\left(x\left(\frac{\partial \bar{z}''}{\partial \theta}\right)^{o}-z\left(\frac{\partial \bar{x}''}{\partial \theta}\right)^{o}\right)}{b^{2}z^{2}}=\frac{(b-x)\left(\frac{\partial \bar{z}''}{\partial \theta}\right)^{o}+z\left(\frac{\partial \bar{x}''}{\partial \theta}\right)^{o}}{b}. \tag{4.63}$$

Pentru a calcula derivatele parţiale $\partial\bar{x}''/\partial\theta$ şi $\partial\bar{z}''/\partial\theta$ se va ţine seama de relaţiile (4.46), precum şi de faptul că mărimile θ sunt incluse în matricea de rotaţie R'':

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial \bar{x}''}{\partial \theta}\\ \frac{\partial \bar{y}''}{\partial \theta}\\ \frac{\partial \bar{z}''}{\partial \theta}\end{pmatrix}=\frac{\partial R''}{\partial \theta}\begin{pmatrix}x''\\ y''\\ z''\end{pmatrix}. \tag{4.64}$$

Pe de altă parte, pentru a particulariza aceste derivate parţiale în raport cu rotaţiile ω'',φ'' şi κ'', se vor avea în vedere expresiile (B.30), respectiv (B.31) şi (B.32) ale derivatelor parţiale ale matricei de rotaţie R în raport cu aceste mărimi (pentru valorile iniţiale nule). În consecinţă, din relaţiile (4.64) se vor deduce:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial \bar{x}''}{\partial \omega''}\right)^{o}=0;\left(\frac{\partial \bar{x}''}{\partial \varphi''}\right)^{o}=(z'')^{o}=z;\left(\frac{\partial \bar{x}''}{\partial \kappa''}\right)^{o}=(-y'')^{o}=-y;\\ &\left(\frac{\partial \bar{z}''}{\partial \omega''}\right)^{o}=(y'')^{o}=y;\left(\frac{\partial \bar{z}''}{\partial \varphi''}\right)^{o}=(-x'')^{o}=b-x;\left(\frac{\partial \bar{z}''}{\partial \kappa''}\right)^{o}=0.\end{aligned} \tag{4.65}$$

Trebuie menţionat că pentru mărimile x'',y'',z'' s-au folosit aceleaşi aproximaţii ca şi pentru $\bar{x}'',\bar{y}'',\bar{z}''$ (4.60), rotaţiile fiind în general mici.

Substituind expresiile (4.65) în (4.63), rezultă:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial z}{\partial \omega''}\right)^{o}&=\frac{(b-x)y}{b}=\left(1-\frac{x}{b}\right)y\\ \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi''}\right)^{o}&=\frac{(b-x)^{2}+z^{2}}{b}\end{aligned} \tag{4.66}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \kappa''}\right)^{o} = -\frac{y\,z}{b}\ .$$

Prin urmare, conform relației (4.59) și ținând seama de (4.61), (4.62) și (4.66) deformația altimetrică dz se poate exprima în funcție de erorile elementelor de orientare relativă, sub forma:

$$dz = \left(1-\frac{x}{b}\right)db_z + \left(1-\frac{x}{b}\right)y\,d\omega'' + \frac{(b-x)^2+z^2}{b}d\varphi'' - \frac{y\,z}{b}d\kappa'' \ . \qquad (4.67)$$

În mod similar, se pot obține expresiile deformațiilor planimetrice:

$$dx = \left(1-\frac{x}{b}\right)\frac{x}{z}db_z + \left(1-\frac{x}{b}\right)\frac{x\,y}{z}d\omega'' + \frac{\left((b-x)^2+z^2\right)x}{b\,z}d\varphi'' - \frac{x\,y}{b}d\kappa'' = \frac{x}{z}dz \qquad (4.68)$$

$$dy = \frac{1}{2}db_y - \frac{y(2x-b)}{2bz}db_y - \frac{y^2(2x-b)+bz^2}{2bz}d\omega'' + \frac{y\left((2x-b)(x-b)+2z^2\right)}{2bz}d\varphi'' + \frac{b(x-b)-2y^2}{2b}d\kappa'' \ . \qquad (4.69)$$

Pentru a analiza mai în detaliu deformațiile altimetrice, se va reprezenta contribuția fiecărui element de orientare relativă, respectiv a fiecărui termen din relația (4.67) la această deformare. În acest scop, se vor particulariza expresiile acestor termeni pentru cele 6 puncte standard și se va figura modul în care fiecare eroare deformează modelul (fig. 4.6).

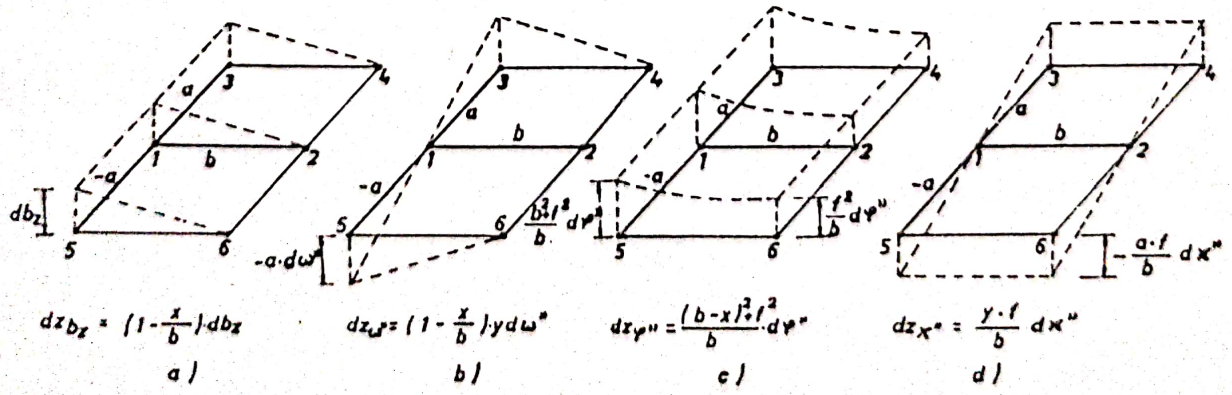

Figura 4.6. Deformațiile stereomodelului.

Deoarece deformațiile se consideră la scara fotogramelor, în relațiile corespunzătoare erorilor $d\varphi''$ și $d\kappa''$ s-a avut în vedere aproximația $z \approx -f$. Trebuie

menţionat de asemenea că în figura 4.6 suprafaţa deformată s-a reprezentat prin linii punctate.

Pe baza figurii 4.6, se pot trage următoarele concluzii privind deformaţiile altimetrice:

a) o eroare db_z produce o înclinare longitudinală a stereomodelului;
b) o eroare $d\omega''$ provoacă o deformare hiperbolică (sub forma unui paraboloid hiperbolic);
c) o eroare $d\varphi''$ provoacă o deformare compusă dintr-o deplasare pe direcţia z şi o curbură cilindrică (cilindru parabolic);
d) o eroare $d\kappa''$ produce o înclinare transversală a stereomodelului.

Trebuie menţionat de asemenea că deformaţiile liniare (înclinarea longitudinală produsă de db_z, înclinarea transversală produsă de $d\kappa''$ şi translaţia pe direcţia z, componentă a deformării provocate de înclinarea $d\varphi''$) pot fi corectate în procesul de orientare absolută a stereomodelului (după cum se va vedea în paragraful următor).

4.3. Orientarea absolută a stereomodelului

Deoarece în procesul de orientare relativă se utilizează doar perechi de puncte corespondente ale celor două imagini conjugate, fără a se folosi puncte de sprijin din teren, stereomodelul care se va determina în urma orientării relative va avea o scară arbitrară şi o poziţie arbitrară în spaţiu. În consecinţă, acest stereomodel va trebui orientat în raport cu sistemul de coordonate-teren (fig. 4.7).

4.3.1. RELAŢII MATEMATICE DE BAZĂ

Problema care se pune în cadrul orientării absolute este în esenţă o problemă de transformare a coordonatelor spaţiale între două sisteme rectangulare: sistemul de coordonate-model $O'xyz$ şi sistemul de coordonate-teren $OXYZ$ (fig. 4.7). Aceasta se exprimă prin relaţiile **transformării conforme (ortogonale) tridimensionale** (A.37):

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (4.70)$$

Scanned with OKEN Scanner

care se poate scrie simplificat sub forma (A.38):

$$X = X_o + m\,R\,x \ . \tag{4.71}$$

Cei 7 **parametri** ai transformării conforme spațiale sunt (după cum se arată în paragraful A.2.2.b):

- 3 translații (X_o, Y_o, Z_o) reprezentând coordonatele originii sistemului $O'xyz$ în raport cu sistemul $OXYZ$ (fig. 4.7);
- factorul de scară (m) și
- 3 rotații (Ω,Φ,K) conținute în matricea de rotație spațială R, adică în expresiile cosinusurilor directoare r_{ij}.

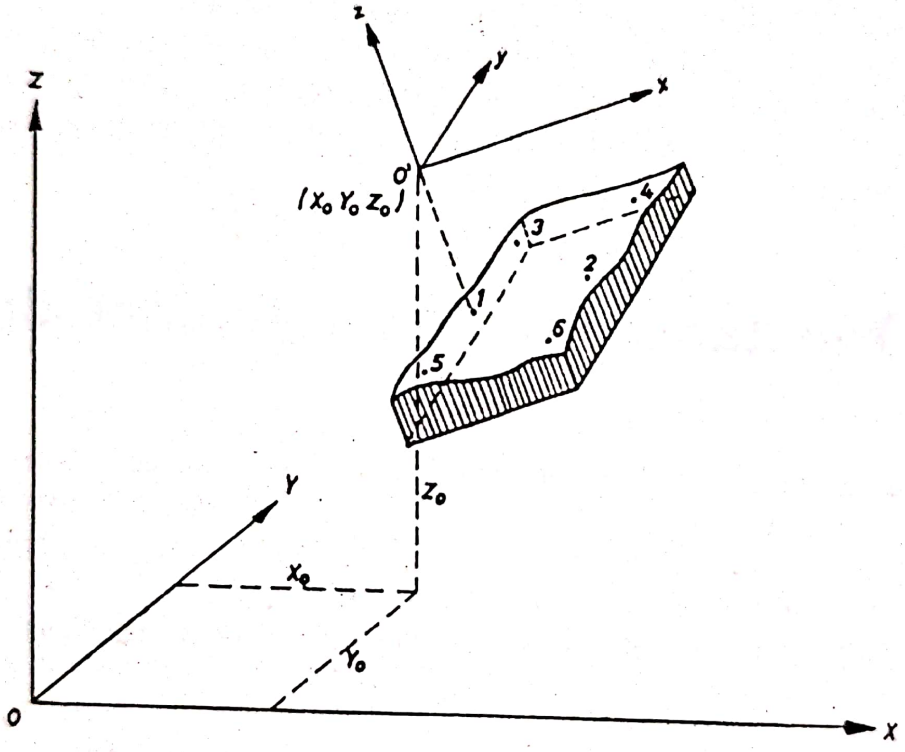

Figura 4.7. Orientarea absolută a stereomodelului.

Având în vedere că în principiu orientarea absolută a stereomodelului constă în **aducerea în scară** a acestuia (pentru care sunt necesare două puncte cât mai depărtate) și **orizontalizarea** lui (pentru care vor trebui 3 puncte necoliniare și cât mai depărtate, cu cote cunoscute), determinarea parametrilor transformării se va putea face cunoscând coordonatele-teren X,Y,Z pentru două puncte și cota Z pentru un al treilea punct (îndeplinind condițiile menționate), precum și coordonatele-model x,y,z ale imaginilor acestor 3 puncte.

Deoarece însă în formulele transformării apar mărimi măsurate (afectate de erori), problema se va rezolva prin compensare pe baza principiului pătratelor

minime. În consecinţă, pentru a se asigura măsurători suplimentare, se va utiliza un număr $n \geq 3$ de puncte de sprijin complete (având coordonate spaţiale în ambe.e sisteme).

Având în vedere că relaţia (4.71), care poate fi scrisă (pentru un punct) sub forma

$$\underset{(3,1)}{F} \equiv \underset{(3,1)}{X_o} + \underset{(3,3)(3,1)}{m \cdot R \cdot x} - \underset{(3,1)}{X} = \underset{(3,1)}{O} \quad ,$$

conţine atât mărimi măsurate (x şi X), cât şi parametri necunoscuţi (X_o,m,R), se va utiliza cazul general de compensare prin metoda pătratelor minime (v.paragraful C.2.5). Prin urmare, sistemul de ecuaţii liniarizate va fi de forma (C.133):

$$A\,V + B\,\Delta - W = O\,.$$

Fiecărui punct i îi vor corespunde următoarele submatrice:

$$\underset{(3,6)}{A_i} = \left(\underset{(3,3)}{m^o R^o} \quad \underset{(3,3)}{-I} \right)_i ,$$

$$\underset{(1,6)}{V_i^T} = (v_x \; v_y \; v_z \; v_X \; v_Y \; v_Z)_i \; ,$$

$$\underset{(3,7)}{B_i} = \left(\underset{(3,3)}{I} \quad \underset{(3,1)}{R^o x} \quad \underset{(3,1)}{m^o \left(\frac{\partial R}{\partial \Omega}\right)^o x} \quad \underset{(3,1)}{m^o \left(\frac{\partial R}{\partial \Phi}\right)^o x} \quad \underset{(3,1)}{m^o \left(\frac{\partial R}{\partial K}\right)^o x} \right)_i ,$$

$$\underset{(7,1)}{\Delta^T} = (dX_o \; dY_o \; dZ_o \; dm \; d\Omega \; d\Phi \; dK) \; ,$$

$$\underset{(3,1)}{-W_i} = \underset{(3,1)}{F_i^o} = X_o^o + m^o R^o x_i - X_i \; .$$

Totuşi (după cum se demonstrează în [23], p. 210,211) dacă se consideră toate coordonatele necorelate şi cu precizii egale, sau când x_i,y_i,z_i au precizii egale, iar X_i,Y_i,Z_i au de asemenea precizii egale dar diferite de cele ale coordonatelor x_i,y_i,z_i, soluţia (referitoare la parametrii transformării) obţinută prin modelul general de compensare este identică celei care s-ar obţine pe baza modelului mai simplu al măsurătorilor indirecte (v.paragraful C.2.2).

Pe de altă parte, având în vedere că în forma liniarizată, sistemul de ecuaţii permite determinarea doar a unor corecţii diferenţiale, va fi necesară o transformare aproximativă iniţială în urma căreia mărimile x şi X vor avea valori suficient de apropiate. În consecinţă, în faza de compensare se vor putea considera aproximaţiile $X_o^o = 0$, $m^o = 1$, $R^o = I$, precum şi expresiile (B.30), (B.31) şi (B.32) pentru derivatele parţiale ale matricei de rotaţie R în raport cu cei 3 parametri unghiulari. În aceste condiţii, submatricea A_i va deveni:

Scanned with OKEN Scanner

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nedepinzând de punctul i și presupunând măsurătorile independente, matricea A va avea forma:

$$\underset{(3n,6n)}{A} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix},$$

n fiind numărul punctelor de sprijin (de reper).

În mod similar, submatricea B_i devine:

$$B_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 & z & -y \\ 0 & 1 & 0 & y & -z & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & z & y & -x & 0 \end{pmatrix}$$

identică celei din relația (A.45) dedusă în paragraful A.2.2.b, iar matricea B va avea forma:

$$\underset{(3n,7)}{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}.$$

De asemenea, termenul liber corespunzător unui punct i va fi:

$$-W_i = \begin{pmatrix} x - X \\ y - Y \\ z - Z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix},$$

aceste notații având în vedere aprecierile anterioare privind mărimile x și X.

Ca și în cazul orientării relative pe baza condiției de coplanaritate (v.paragrafele 4.1.3 și 4.1.4) se poate observa că valorile măsurate $(x,y,z;\ X,Y,Z)_i$ și corecțiile lor $(v_x,v_y,v_z;v_X,v_Y,v_Z)_i$ apar într-o singură ecuație (cea corespunzătoare punctului I). Prin urmare, se vor putea introduce notațiile

$$\begin{aligned} v_x - v_X &= -\bar{v}_x \\ v_y - v_Y &= -\bar{v}_y \\ v_z - v_Z &= -\bar{v}_z \end{aligned} \tag{4.72}$$

de care se va ţine seama la calculul preciziilor, dar determinarea parametrilor transformării se va putea face ca în cazul măsurătorilor indirecte.

Astfel, pentru fiecare punct se vor scrie câte 3 ecuaţii de corecţii de forma:

$$\begin{cases} dX_o & +x\,dm & +z\,d\Phi - y\,d\mathrm{K} - dx = \bar{v}_x \\ dY_o & +y\,dm - z\,d\Omega & +x\,d\mathrm{K} - dy = \bar{v}_y \\ dZ_o & +z\,dm + y\,d\Omega - x\,d\Phi & - dz = \bar{v}_z \end{cases} \tag{4.73}$$

similare cu relaţiile (A.44).

Trebuie remarcat că în cazul în care se consideră coordonatele-teren ca lipsite de erori ($v_X=v_Y=v_Z=0$), $\bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{v}_z$ vor fi chiar v_x, v_y, v_z (cu semn schimbat).

Dacă punctele de sprijin sunt măsurate în teren cu precizii diferite şi se consideră necunoscute coordonatele acestor puncte (X,Y,Z), corecţiile coordonatelor-teren măsurate (v_X, v_Y, v_Z) se pot separa de corecţiile coordonatelor fotogrammetrice (v_x, v_y, v_z), pentru fiecare punct de reper scriindu-se două grupe de câte 3 ecuaţii:

$$\begin{cases} -dX_o & -x\,dm & -z\,d\Phi + y\,d\mathrm{K} + X - x = v_x \\ -dY_o & -y\,dm + z\,d\Omega & -x\,d\mathrm{K} + Y - y = v_y \\ -dZ_o & -z\,dm - y\,d\Omega + x\,d\Phi & + Z - z = v_z \end{cases}$$

respectiv

$$\begin{aligned} X - X^m &= v_X \\ Y - Y^m &= v_Y \\ Z - Z^m &= v_Z \end{aligned}$$

unde X^m, Y^m, Z^m sunt coordonatele obţinute din măsurători.

Dacă x,y,z se consideră valori aproximative pentru X,Y,Z, adică

$$\begin{aligned} X &= x + dx \\ Y &= y + dy \\ Z &= z + dz \end{aligned}$$

necunoscutele X,Y,Z se vor înlocui cu corecţiile necunoscute dx,dy,dz, cele două grupe de ecuaţii devenind:

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{cases} -dX_o & -x\,dm & -z\,d\Phi + y\,d\mathrm{K} - dx = v_x \\ -dY_o & -y\,dm + z\,d\Omega & -x\,d\mathrm{K} - dy = v_y \\ -dZ_o & -z\,dm - y\,d\Omega + x\,d\Phi & -dz = v_z \end{cases}$$

respectiv

$$dx + x - X^m = v_X$$
$$dy + y - Y^m = v_Y$$
$$dz + z - Z^m = v_Z$$

toate necunoscutele fiind acum de ordin de mărime apropiat.

La tratarea acestor ecuaţii de corecţii prin metoda pătratelor minime, vor trebui avute în vedere ponderile măsurătorilor. Presupunând măsurătorile fotogrammetrice de egală precizie şi având ponderea 1, ponderile coordonatelor-teren vor fi evaluate în raport cu acestea, după cum se va vedea în paragraful 6.3.2.a.

De asemenea, trebuie precizat că deoarece coordonatele fotogrammetrice au suferit o transformare aproximativă iniţială, ele au devenit comparabile cu coordonatele-teren, ceea ce este valabil şi pentru corecţiile corespunzătoare.

În fine, se poate remarca faptul că la orientarea absolută a unui stereomodel, când se consideră necunoscute coordonatele-teren ale punctelor de reper şi având ponderi diferite, rezolvarea se poate realiza destul de uşor chiar pe baza modelului general de compensare (prezentat în prima parte a acestui paragraf).

4.3.2. DETERMINAREA VALORILOR APROXIMATIVE ALE PARAMETRILOR DE ORIENTARE

După cum s-a arătat în paragraful anterior, cei 7 parametri de orientare absolută vor fi determinaţi într-un proces iterativ pe baza unor valori aproximative obţinute în prealabil. Spre deosebire de cazul orientării relative unde cele 5 elemente de orientare având valori mici, puteau fi considerate în prima aproximaţie egale cu zero, aici majoritatea parametrilor au valori mari ce vor trebui determinate înaintea compensării.

Totuşi şi în acest caz, două din elementele de orientare absolută pot fi aproximate cu zero ($\Omega^o \approx \Phi^o \approx 0$), presupunând fotogramele aproape nadirale, înclinările stereomodelului fiind deci foarte mici. Prin urmare, forma aproximativă a matricei de rotaţie va depinde doar de K (ce nu poate fi considerat egal cu zero, fiind în principiu unghiul format de direcţia de zbor cu axa X):

$$R^o = \begin{pmatrix} \cos K^o & -\sin K^o & 0 \\ \sin K^o & \cos K^o & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Particularizând relaţiile transformării conforme spaţiale (4.70) pentru valorile aproximative, rezultă:

$$\begin{pmatrix} X^o \\ Y^o \\ Z^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_o^o \\ Y_o^o \\ Z_o^o \end{pmatrix} + m^o \begin{pmatrix} \cos K^o & -\sin K^o & 0 \\ \sin K^o & \cos K^o & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad (4.74)$$

sau dezvoltat

$$\begin{cases} X^o = X_o^o + \left(m^o \cos K^o\right)x - \left(m^o \sin K^o\right)y \\ Y^o = Y_o^o + \left(m^o \sin K^o\right)x + \left(m^o \cos K^o\right)y \\ Z^o = Z_o^o + m^o z\,. \end{cases} \qquad (4.75)$$

Dacă se consideră două puncte de sprijin i şi j şi se scriu primele două egalităţi din (4.75) pentru aceste puncte, scăzând relaţiile corespunzătoare se elimină translaţiile, obţinându-se sistemul:

$$\begin{cases} X_i^o - X_j^o = \left(m^o \cos K^o\right)\left(x_i - x_j\right) - \left(m^o \sin K^o\right)\left(y_i - y_j\right) \\ Y_i^o - Y_j^o = \left(m^o \cos K^o\right)\left(y_i - y_j\right) + \left(m^o \sin K^o\right)\left(x_i - x_j\right). \end{cases} \qquad (4.76)$$

Notând $X_i - X_j = \Delta X$, $Y_i - Y_j = \Delta Y$ (unde valorile aproximative au fost înlocuite cu mărimile măsurate), $x_i - x_j = \Delta x$, $y_i - y_j = \Delta y$ şi rezolvând sistemul (4.76) în raport cu necunoscutele ($m^o \cos K^o$) şi ($m^o \sin K^o$) prin regula lui Cramer (B.49), rezultă:

$$\begin{aligned} m^o \cos K^o &= \frac{\Delta X \Delta x + \Delta Y \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \\ m^o \sin K^o &= \frac{\Delta Y \Delta x - \Delta X \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}. \end{aligned} \qquad (4.77)$$

Cu ajutorul acestor valori se poate obţine factorul de scară aproximativ:

$$m^o = \sqrt{\left(m^o \cos K^o\right)^2 + \left(m^o \sin K^o\right)^2}\,. \qquad (4.78)$$

Scanned with OKEN Scanner

Având în vedere că stereomodelul este înclinat şi deci factorul de scară calculat pe diferite direcţii va avea valori sensibil diferite, este recomandabilă utilizarea a două sau a mai multor combinaţii de puncte (cât mai depărtate), aceasta permiţând totodată depistarea eventualelor greşeli privind coordonatele punctelor de sprijin. Dacă diferenţele valorilor obţinute prin diferitele combinaţii se încadrează în anumite toleranţe, $m^o cos\ K^o$ şi $m^o sin\ K^o$ vor fi mediile valorilor corespunzătoare, iar m^o se va determina pe baza acestor medii.

Pentru calculul valorilor aproximative ale translaţiilor se folosesc relaţiile:

$$\begin{aligned} X_o^o &= X - (m^o cos\ K^o)\ x + (m^o sin\ K^o)\ y\ , \\ Y_o^o &= Y - (m^o sin\ K^o)\ x - (m^o cos\ K^o)\ y\ , \\ Z_o^o &= Z - m^o\ z\ , \end{aligned} \tag{4.79}$$

rezultând din (4.75), unde valorile aproximative ale coordonatelor-teren au fost înlocuite cu mărimile măsurate. Ca şi în cazul celorlalte valori aproximative, pentru fiecare translaţie se pot obţine mai multe valori (câte una pentru fiecare punct de sprijin), calculându-se apoi mediile corespunzătoare.

În final, se determină coordonatele-model transformate cu valorile aproximative ale parametrilor de orientare utilizând relaţiile (4.75).

O variantă mai avantajoasă (după cum se va vedea în continuare) se bazează pe utilizarea coordonatelor reduse la centrul de greutate:

$$\begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_i - \begin{pmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_i - \begin{pmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{pmatrix} , \tag{4.80}$$

unde

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} , \quad Y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} , \quad Z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n} ,$$

$$x_g = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} , \quad y_g = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} , \quad z_g = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n} ,$$

n fiind numărul punctelor de sprijin. Trebuie remarcat că G şi g sunt puncte corespondente, reprezentând centrul de greutate al punctelor de reper din teren şi respectiv centrul de greutate al imaginilor acestora din stereomodel.

În acest caz, translaţiile sunt eliminate şi relaţiile (4.74) devin:

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{pmatrix} \overline{X}^o \\ \overline{Y}^o \\ \overline{Z}^o \end{pmatrix} = m^o \begin{pmatrix} \cos K^o & -\sin K^o & 0 \\ \sin K^o & \cos K^o & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix}, \qquad (4.81)$$

La calculul mărimilor $m^o \cos K^o$ și $m^o \sin K^o$ se pot utiliza acum direct coordonatele reduse (având în vedere modul în care se obțin):

$$m^o \cos K^o = \frac{\overline{X}\,\overline{x} + \overline{Y}\,\overline{y}}{\overline{x}^2 + \overline{y}^2}, \quad m^o \sin K^o = \frac{\overline{Y}\,\overline{x} - \overline{X}\,\overline{y}}{\overline{x}^2 + \overline{y}^2}, \qquad (4.82)$$

pentru fiecare punct rezultând câte o valoare și luând apoi mediile corespunzătoare (dacă diferențele nu depășesc o anumită toleranță).

Factorul de scară aproximativ se poate obține cu aceeași formulă (4.78) pe baza valorilor medii ale mărimilor $m^o \cos K^o$ și $m^o \sin K^o$.

În final, se determină coordonatele-model (reduse) transformate cu valorile aproximative ale parametrilor de orientare utilizând relațiile (4.81).

4.3.3. COMPENSAREA ORIENTĂRII ABSOLUTE

Presupunând că valorile aproximative X^o, Y^o, Z^o calculate în etapa anterioară cu relațiile (4.74) sunt suficient de apropiate de coordonatele-teren X, Y, Z corespunzătoare, se vor putea utiliza ecuațiile (4.73) pentru determinarea iterativă a corecțiilor parametrilor de orientare (în condițiile precizate la paragraful 4.3.1). Se va avea în vedere că în locul coordonatelor-model x, y, z, la prima iterație se vor folosi coordonatele transformate pe baza valorilor aproximative ale parametrilor X^o, Y^o, Z^o iar apoi, la fiecare iterație, coordonatele transformate în iterația anterioară. Prin urmare, se vor putea scrie următoarele relații iterative:

$$\begin{cases} dX_o^i + X^{i-1} dm^i + Z^{i-1} d\Phi^i - Y^{i-1} dK^i - dX^{i-1} = \overline{v}_x^i \\ dY_o^i + Y^{i-1} dm^i - Z^{i-1} d\Omega^i + X^{i-1} dK^i - dY^{i-1} = \overline{v}_y^i \\ dZ_o^i + Z^{i-1} dm^i + Y^{i-1} d\Omega^i - X^{i-1} d\Phi^i - dZ^{i-1} = \overline{v}_z^i \end{cases} \qquad (4.83)$$

unde

$$dX^{i-1} = X - X^{i-1},$$
$$dY^{i-1} = Y - Y^{i-1},$$
$$dZ^{i-1} = Z - Z^{i-1},$$

iar i reprezintă numărul iterației.

Scanned with OKEN Scanner

La fiecare iteraţie, pentru cele *n* puncte de sprijin se va putea forma un sistem de ecuaţii de corecţii de forma (C.66):

$$\underset{(3n,7)}{A} \cdot \underset{(7,1)}{\Delta} - \underset{(3n,1)}{L} = \underset{(3n,1)}{V}$$

Prin aplicarea principiului pătratelor minime rezultă sistemul de ecuaţii normale (C.69), cu soluţia (C.70), reprezentând valorile cele mai probabile ale corecţiilor celor 7 parametri de orientare absolută.

Cu ajutorul acestor corecţii se va calcula un nou set de coordonate transformate (îmbunătăţite) pe baza următoarelor relaţii deduse din (4.70):

$$\begin{pmatrix} X^i \\ Y^i \\ Z^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dX_o^i \\ dY_o^i \\ dZ_o^i \end{pmatrix} + m^i R^i \begin{pmatrix} X^{i-1} \\ Y^{i-1} \\ Z^{i-1} \end{pmatrix}, \qquad (4.84)$$

unde $m^i = 1+dm^i$, iar R^i este matricea ortogonală de rotaţie calculată, într-una din formele prezentate în paragraful A.2.2.a, cu valorile $d\Omega^i, d\Phi^i, dK^i$.

Aceste coordonate transformate vor permite formarea unui nou sistem de ecuaţii de tipul (4.83) pentru cele *n* puncte de reper, iar prin aplicarea principiului pătratelor minime se va obţine un nou set de corecţii.

Procesul iterativ va continua în mod similar, până când corecţiile devin nesemnificative, adică:

$$\begin{aligned} &|dm| \le 10^{-5}, \\ &|d\theta| \le 10^{-5} \ (\theta = \Omega, \Phi, K), \\ &|d\chi| \le 0{,}1‰ H \ (\chi = X_o, Y_o, Z_o), \end{aligned} \qquad (4.85)$$

unde H se poate calcula cu relaţia aproximativă $H \approx m \cdot f$.

Coordonatele obţinute în ultima iteraţie cu relaţiile (4.84) vor reprezenta coordonatele calculate ale punctelor de sprijin (X^c, Y^c, Z^c).

Având în vedere că în ultima iteraţie corecţiile parametrilor sunt practic nule, se poate scrie:

$$\begin{aligned} \bar{v}_x &= X - X^c \\ \bar{v}_y &= Y - Y^c \\ \bar{v}_z &= Z - Z^c \end{aligned}$$

şi pe baza acestor valori se va putea calcula eroarea medie pătratică a unităţii de pondere cu relaţia (C.90), numărul ecuaţiilor suplimentare fiind $3n$-7.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul utilizării coordonatelor reduse la centrul de greutate, prin eliminarea translațiilor, relațiile (4.83) devin:

$$\begin{cases} \overline{X}^{i-1}\,dm^i + \overline{Z}^{i-1}\,d\Phi^i - \overline{Y}^{i-1}\,dK^i - d\overline{X}^{i-1} = \overline{v}_x^i \\ \overline{Y}^{i-1}\,dm^i - \overline{Z}^{i-1}\,d\Omega^i + \overline{X}^{i-1}\,dK^i - d\overline{Y}^{i-1} = \overline{v}_y^i \\ \overline{Z}^{i-1}\,dm^i + \overline{Y}^{i-1}\,d\Omega^i - \overline{X}^{i-1}\,d\Phi^i - d\overline{Z}^{i-1} = \overline{v}_z^i \end{cases}, \tag{4.86}$$

unde

$$\begin{aligned} d\overline{X}^{i-1} &= \overline{X} - \overline{X}^{i-1}, \\ d\overline{Y}^{i-1} &= \overline{Y} - \overline{Y}^{i-1}, \\ d\overline{Z}^{i-1} &= \overline{Z} - \overline{Z}^{i-1}, \end{aligned}$$

i reprezentând numărul iterației.

Cele $3n$ ecuații de corecții de tipul (4.86) pot fi scrise matriceal sub forma:

$$\begin{pmatrix} \overline{X}_1 & 0 & \overline{Z}_1 & -\overline{Y}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{X}_n & 0 & \overline{Z}_n & -\overline{Y}_n \\ \overline{Y}_1 & -\overline{Z}_1 & 0 & \overline{X}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{Y}_n & -\overline{Z}_n & 0 & \overline{X}_n \\ \overline{Z}_1 & \overline{Y}_1 & -\overline{X}_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{Z}_n & \overline{Y}_n & -\overline{X}_n & 0 \end{pmatrix}^{i-1} \begin{pmatrix} dm \\ d\Omega \\ d\Phi \\ dK \end{pmatrix}^i - \begin{pmatrix} d\overline{X}_1 \\ \vdots \\ d\overline{X}_n \\ d\overline{Y}_1 \\ \vdots \\ d\overline{Y}_n \\ d\overline{Z}_1 \\ \vdots \\ d\overline{Z}_n \end{pmatrix}^{i-1} = \begin{pmatrix} \overline{v}_{x_1} \\ \vdots \\ \overline{v}_{x_n} \\ \overline{v}_{y_1} \\ \vdots \\ \overline{v}_{y_n} \\ \overline{v}_{z_1} \\ \vdots \\ \overline{v}_{z_n} \end{pmatrix}^i,$$

iar sistemul corespunzător de ecuații normale va fi (utilizând notația Gauss pentru sumă):

$$\begin{pmatrix} \left[\overline{X}^2+\overline{Y}^2+\overline{Z}^2\right] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left[\overline{Y}^2+\overline{Z}^2\right] & -\left[\overline{X}\overline{Y}\right] & -\left[\overline{X}\overline{Z}\right] \\ 0 & -\left[\overline{X}\overline{Y}\right] & \left[\overline{X}^2+\overline{Z}^2\right] & -\left[\overline{Y}\overline{Z}\right] \\ 0 & -\left[\overline{X}\overline{Z}\right] & -\left[\overline{Y}\overline{Z}\right] & \left[\overline{X}^2+\overline{Y}^2\right] \end{pmatrix}^{i-1} \begin{pmatrix} dm \\ d\Omega \\ d\Phi \\ dK \end{pmatrix}^i = \tag{4.87}$$

$$= \begin{pmatrix} \left[\overline{X}d\overline{X}+\overline{Y}d\overline{Y}+\overline{Z}d\overline{Z}\right] \\ \left[-\overline{Z}d\overline{Y}+\overline{Y}d\overline{Z}\right] \\ \left[\overline{Z}d\overline{X}-\overline{X}d\overline{Z}\right] \\ \left[-\overline{Y}d\overline{X}+\overline{X}d\overline{Y}\right] \end{pmatrix}^{i-1}$$

Scanned with OKEN Scanner

Corecţia scării rezultă direct din prima ecuaţie:

$$dm = \frac{\left[\overline{X}d\overline{X} + \overline{Y}d\overline{Y} + \overline{Z}d\overline{Z}\right]^{i-1}}{\left[\overline{X}^2 + \overline{Y}^2 + \overline{Z}^2\right]^{i-1}} , \qquad (4.88)$$

iar corecţiile mărimilor unghiulare ($d\Omega, d\Phi, d\mathrm{K}$) se vor obţine prin rezolvarea sistemului format de celelalte 3 ecuaţii normale, ceea ce este evident o problemă simplă. Se observă de asemenea că valorile coeficienţilor şi termenilor liberi ai acestui sistem se pot calcula direct cu formulele respective, fără a se mai trece prin faza ecuaţiilor de corecţii (cum este de altfel şi cazul determinării mărimii dm).

Cu ajutorul acestor corecţii, se vor calcula noi coordonate (reduse) transformate pe baza unor relaţii deduse din (4.84):

$$\begin{pmatrix} \overline{X}^i \\ \overline{Y}^i \\ \overline{Z}^i \end{pmatrix} = m^i R^i \begin{pmatrix} \overline{X}^{i-1} \\ \overline{Y}^{i-1} \\ \overline{Z}^{i-1} \end{pmatrix} , \qquad (4.89)$$

unde $m^i = 1 + dm^i$, iar R^i este matricea ortogonală de rotaţie calculată cu valorile $d\Omega^i, d\Phi^i, d\mathrm{K}^i$, folosind una din formele prezentate în paragraful A.2.2.a.

Aceste coordonate transformate vor permite determinarea unui nou set de corecţii utilizând relaţiile (4.87), procesul iterativ continuând în mod similar până când vor fi îndeplinite condiţiile (4.85).

Se vor putea obţine acum coordonatele calculate ale punctelor de sprijin adaugând coordonatelor reduse transformate în ultima iteraţie coordonatele centrului de greutate:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}^c = \begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{pmatrix}^u + \begin{pmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{pmatrix} . \qquad (4.90)$$

Aceste coordonate vor servi la determinarea erorii medii pătratice a unităţii de pondere pe baza relaţiei (C.90) şi având în vedere observaţiile făcute în cazul general (cu coordonate nereduse).

4.3.4. DETERMINAREA COORDONATELOR-TEREN ALE DETALIILOR TOPOGRAFICE

Exploatarea analitică este (după cum s-a precizat în paragraful 1.2.1) o exploatare punct cu punct (ca în topografie). Prin urmare, punctele reprezentând

Scanned with OKEN Scanner

detalii caracteristice topografic şi ale căror imagini au fost măsurate fotogrammetric vor primi coordonate-teren prin transformarea coordonatelor-model corespunzătoare. Aceasta reprezintă a doua etapă descrisă în paragraful 1.2.2 în legătură cu rezolvarea problemei generale a fotogrammetriei analitice, prima etapă constând în determinarea parametrilor orientării absolute.

Pentru calculul coordonatelor-teren ale detaliilor se pot urma în principal două căi. O primă variantă ar fi transformarea succesivă a coordonatelor-model ale acestor puncte odată cu transformarea iterativă a coordonatelor punctelor de sprijin cu relaţiile (4.75) şi (4.84), sau cu relaţiile (4.81), (4.89) şi (4.90) în cazul utilizării coordonatelor reduse la centrul de greutate.

Cealaltă variantă constă în aplicarea transformării conforme spaţiale (4.70) coordonatelor-model ale punctelor, folosind valorile definitive ale parametrilor de orientare, adică:

$$
\begin{aligned}
X_o &= X_o^o + \sum_{i=1}^{u} dX_o^i \\
Y_o &= Y_o^o + \sum_{i=1}^{u} dY_o^i \\
Z_o &= Z_o^o + \sum_{i=1}^{u} dZ_o^i \\
m &= m^o \prod_{i=1}^{u} m^i \quad , \text{ unde } m^i = 1 + dm^i \\
R &= R^u R^{u-1} \ldots R^1 R^o
\end{aligned}
\tag{4.91}
$$

unde cu u s-a notat ultima iteraţie.

În cazul utilizării coordonatelor reduse ale punctelor de sprijin, translaţiile vor fi date de coordonatele centrului de greutate (X_G, Y_G, Z_G), iar transfomarea (4.70) se va aplica de asemenea coordonatelor reduse ale detaliilor topografice la centrul de greutate al punctelor de sprijin $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Dacă se transformă coordonatele nereduse ale detaliilor topografice, translaţiile vor fi date de relaţiile:

$$
\begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{pmatrix} - mR \begin{pmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{pmatrix}
$$

ce rezultă prin particularizarea formulelor (4.70) pentru centrele de greutate corespondente.

În ceea ce priveşte **precizia determinării punctelor pe cale fotogrammetrică**, erorile medii pătratice ale coordonatelor-teren obţinute în urma orientării absolute se pot exprima prin relaţiile (deduse în [21]):

Scanned with OKEN Scanner

$$m_X = m_f m \ ,$$
$$m_Y = m_f m \ , \qquad (4.92)$$
$$m_Z = \frac{H^2}{Bf} m \ ,$$

unde m_f este numitorul scării medii a fotogramelor, H - înălţimea relativă de zbor, B - baza de aerofotografiere, f - distanţa focală a camerei de preluare, iar $m = \pm 0{,}01$ mm (având în vedere precizia la scara fotogramei).

Deoarece mărimile H, B şi f sunt constante pentru o stereogramă, eroarea altimetrică m_Z se mai poate scrie sub forma:

$$m_Z = \pm 0{,}1‰ H \ , \qquad (4.93)$$

considerând formatul fotogramelor 23 cm x 23 cm. De aici, pe baza relaţiei $m_f \approx H/f$ rezultă că pentru aceeaşi scară a fotogramelor, se obţine o precizie altimetrică mai bună când înălţimea relativă de zbor H este mai mică, adică utilizând camere aerofotogrammetrice cu unghi de deschidere foarte mare (deci cu distanţa focală f mică).

Scanned with OKEN Scanner

5. ORIENTAREA EXTERIOARĂ A FOTOGRAMELOR TERESTRE

5.1. Consideraţii generale

Datorită condiţiilor specifice de preluare a fotogramelor terestre, exploatarea acestora este mult mai simplă decât cea a fotogramelor aeriene. Astfel, în cazul fotogramelor terestre, imaginile fotografice sunt preluate din staţii fixe din teren, ale căror poziţii se pot determina riguros, prin metode geodezice. De asemenea, axele de fotografiere au direcţii bine stabilite în raport cu bazele determinate de staţii. Din acest punct de vedere, se pot deosebi 4 cazuri de fotografiere stereoscopică (fig. 5.1):

a) cazul normal (axele de fotografiere perpendiculare pe bază);
b) cazul fotogramelor paralel-decalate;
c) cazul normal-convergent;
d) cazul axelor convergente.

Referitor la cazul b), se poate observa că alegând axa X de-a lungul bazei, situaţia se poate reformula sub denumirea: cazul axelor paralel-deviate. Devierea în stânga sau în dreapta se caracterizează prin semnul unghiului φ (de care va trebui să se ţină seama la aplicarea relaţiilor corespunzătoare).

Trebuie menţionat de asemenea că axele de fotografiere sunt dispuse în plan orizontal sau aproape orizontal (bine determinat).

Prin urmare, elementele de orientare exterioară fiind cunoscute, exploatarea stereogramelor terestre va fi considerabil simplificată. Totuşi, în cazul unei tratări analitice riguroase, va trebui să se ţină seama de faptul că aceste elemente sunt mărimi măsurate, coordonatele necunoscute ale punctelor din spaţiul-obiect obţinându-se pe baza principiului pătratelor minime.

Scanned with OKEN Scanner

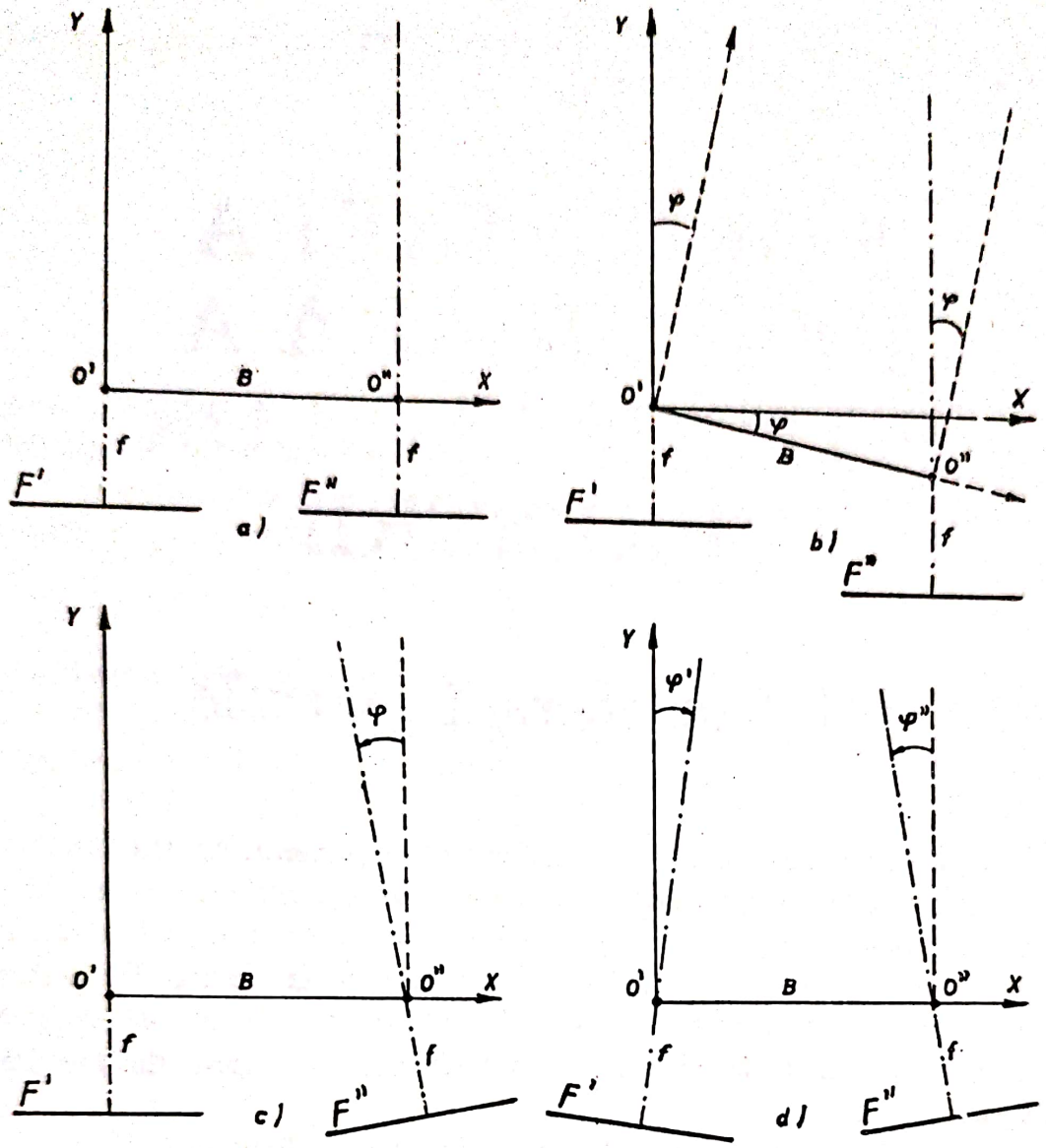

Figura 5.1. Cele 4 cazuri de fotografiere stereoscopică terestră.

În ceea ce privește aplicarea fotogrammetriei terestre în domeniul topografic, vor trebui remarcate unele aspecte limitative. Astfel, aplicabilitatea acestui tip de exploatare fotogrammetrică este restrânsă la zone cu teren accidentat având o desfășurare predominant verticală și care pot prezenta multe porțiuni cuprinse în unghiuri moarte (deci, nevizibile). Pe de altă parte, precizia restituției nu este omogenă, micșorându-se rapid pe măsură ce se mărește profunzimea. Pentru omogenizarea preciziei (îndeosebi în cazul diferențelor mari de scară în cuprinsul fotogramelor) precum și pentru controlul măsurătorilor, se recomandă utilizarea punctelor de reper, deși teoretic acestea nu ar fi necesare, elementele de orientare exterioară fiind determinate direct.

Fotogrammetria terestră a căpătat însă o largă dezvoltare în diferitele domenii netopografice de activitate (de exemplu la determinări de deformații și

deplasări ale structurilor mari etc.). Trebuie precizat că aplicaţiile presupunând o distanţă mai mică de 300 m la obiectul fotografiat (după cum se arată în [2]) sunt cunoscute sub denumirea de **"fotogrammetrie de la mică distanţă"** şi se pot grupa în 3 mari categorii: fotogrammetrie arhitecturală, fotogrammetrie biomedicală şi fotogrammetrie industrială.

5.2. Relaţii de bază

Trebuie remarcat în primul rând că în cazul fotogrammetriei terestre, coordonatele punctelor se determină într-un sistem local, având originea în centrul de perspectivă al fotogramei din stânga (v.fig. 5.1). Axa Y se alege în direcţia spaţiului-obiect (şi în general coincide cu direcţia de fotografiere corespunzătoare fotogramei din stânga), iar axele X şi Z sunt normale pe aceasta în plan orizontal şi respectiv vertical, astfel încât să formeze un triedru de dispunere pozitivă (v.paragraful A.1). În consecinţă, spre deosebire de aerofotogrammetrie, rotaţia κ se defineşte în jurul axei Y, iar φ în jurul axei Z, având în vedere că pe fotogramele terestre imaginile punctelor sunt înregistrate în plan vertical (sau aproape vertical), măsurându-se coordonatele x şi z ale acestora (fig. 5.2).

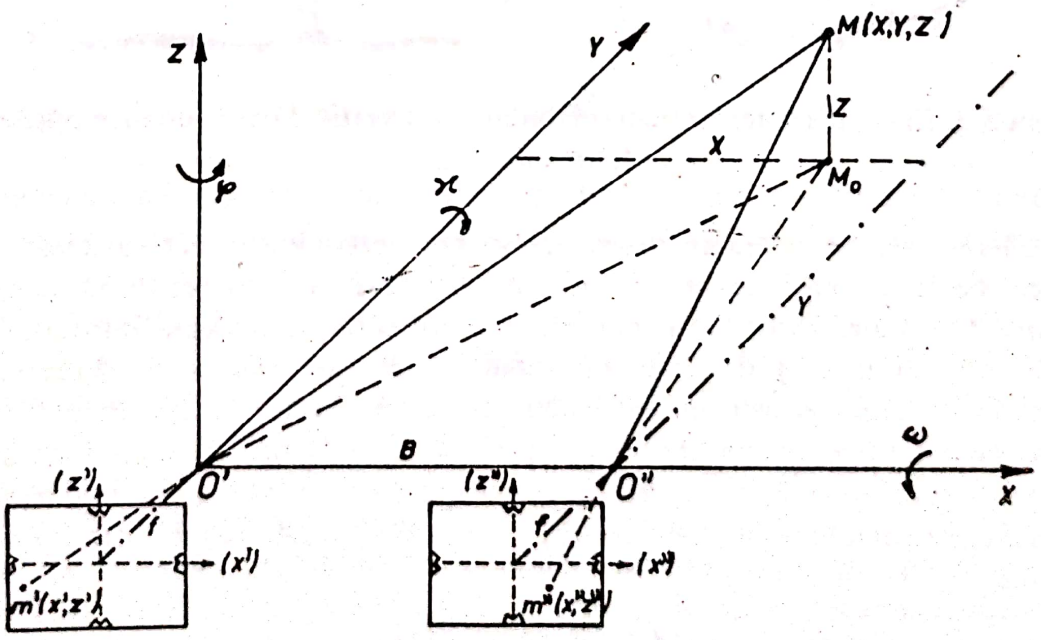

Figura 5.2. Definirea coordonatelor în cazul stereogramei terestre normale.

Pentru a deduce relaţiile prin care se pot obţine coordonatele X,Y,Z ale unui punct M din spaţiul-obiect în funcţie de coordonatele-imagine ale punctelor conjugate corespunzătoare m' şi m'' şi de elementele de orientare interioară şi exterioară, se va considera **cazul fotografierii convergente**, cel mai general din cele 4 cazuri menţionate. Relaţiile corespunzătoare celorlalte 3 situaţii se vor putea deduce apoi prin particularizare.

Trebuie menţionat mai întâi, că spre deosebire de exploatarea analogică implicând anumite restricţii convergenţei axelor (pentru a permite observarea stereoscopică), în cazul fotogrammetriei analitice se pot exploata (punct cu punct) şi fotograme preluate cu o convergenţă mai mare a axelor, având chiar 100% acoperire.

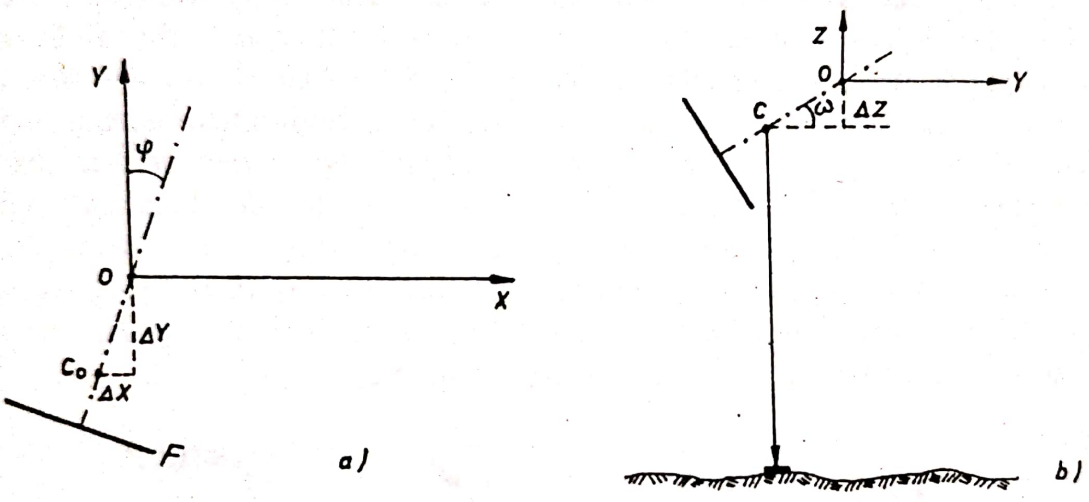

Figura 5.3. Excentricitatea în plan orizontal (a) şi vertical (b) la determinările cu fototeodolitul.

Elementele de orientare exterioară se pot determina direct (în teren), sau indirect, pe baza unor puncte de sprijin (prin metodele descrise în capitolul anterior). Măsurarea directă a parametrilor de orientare exterioară introduce însă excentricităţi (fig. 5.3) de care va trebui să se ţină seama la determinarea coordonatelor-teren. Aceste excentricităţi provin din faptul că punctele C_o şi C reprezentând urmele axelor de rotaţie ale fototeodolitului în plan orizontal şi respectiv vertical nu coincid cu centrul de perspectivă O. În cele mai multe cazuri, cele două axe de rotaţie se intersectează şi deci $OC_o = OC \cos \omega$, din figura 5.3 rezultând:

$$\begin{aligned} \Delta X &= OC \cos \omega \ \sin \varphi \\ \Delta Y &= OC \cos \omega \ \cos \varphi \\ \Delta Z &= OC \sin \omega \ . \end{aligned} \qquad (5.1)$$

Măsurate direct sau obţinute indirect, elementele de orientare exterioară pot fi tratate în două moduri distincte: ca mărimi fixate, sau ca mărimi care vor primi corecţii.

În primul caz (tratarea neriguroasă), elementele de orientare (considerate fixate) vor servi la determinarea directă a coordonatelor-teren ale punctelor, pe baza unor formule destul de simple, ce vor fi deduse în continuare.

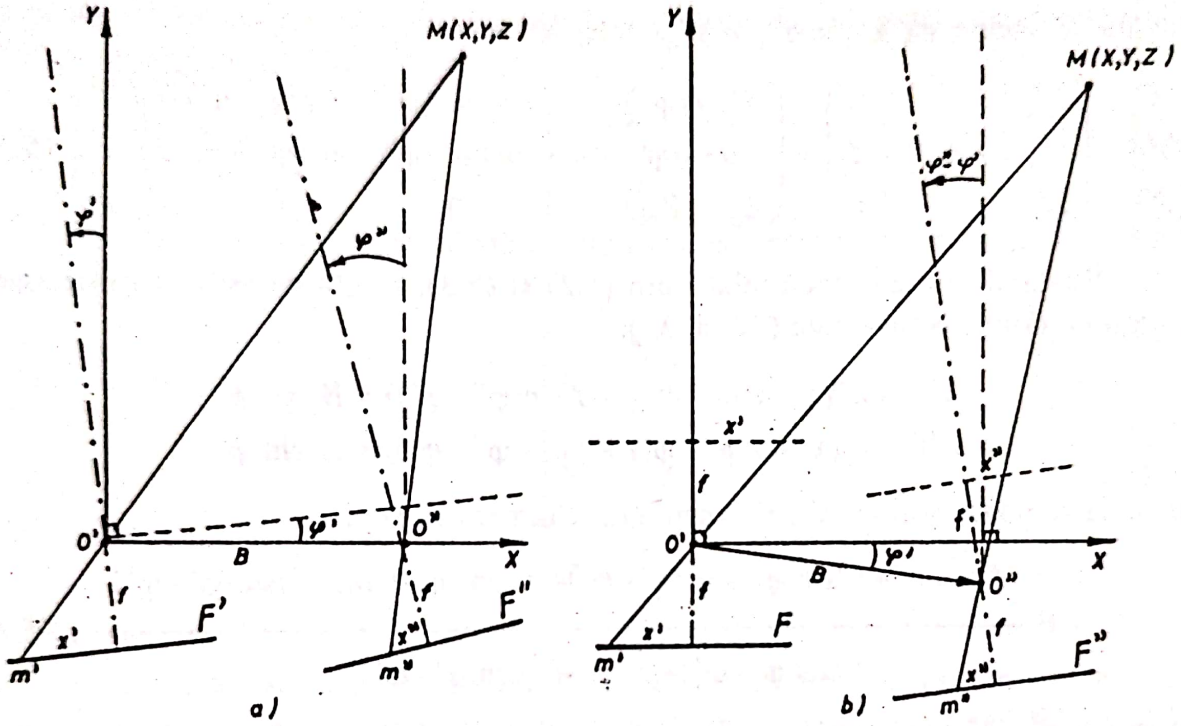

Figura 5.4. Elementele fotografierii convergente.

Presupunând aparatul calat în staţie şi deci axa x a fotogramei orizontală (implicând totodată $\kappa = 0$) şi considerând axa de fotografiere de asemenea orizontală, singura rotaţie care va apare va fi în planul (X,Y) şi se va nota cu φ' pentru axa din stânga şi cu φ'' pentru cea din dreapta (fig. 5.4.a). Trebuie subliniat că ambele rotaţii sunt figurate în sens pozitiv (după cum se defineşte în paragraful A.1 rotaţia pozitivă în planul OXY). Dacă se alege ca axă Y direcţia de fotografiere corespunzătoare fotogramei din stânga (F'), atunci baza $O'O''$ va forma un unghi φ' cu direcţia X, iar rotaţia axei din dreapta va deveni $\varphi''-\varphi'$ (fig.5.4.b).

Pentru a determina coordonatele unui punct M din spaţiul-obiect (în sistemul local definit anterior) în funcţie de coordonatele imaginilor m' şi m'' şi de elementele de orientare, se pot folosi relaţiile (4.2) şi (4.3), cu observaţia că aici în locul coordonatelor-model x,y,z se obţin coordonatele-teren X,Y,Z. De asemenea, după cum s-a mai menţionat, pe fotogramă se măsoară x şi z, iar f apare pe direcţia y cu semnul +, deoarece axa y (spre deosebire de z în cazul fotogramelor aeriene)

este îndreptată spre spaţiul-obiect. Ţinând seama de toate acestea, pe baza relaţiilor (4.2) şi (4.3) se poate scrie:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_o \\ Y'_o \\ Z'_o \end{pmatrix} + \lambda' R' \begin{pmatrix} x' \\ f \\ z' \end{pmatrix} = \lambda' \begin{pmatrix} x' \\ f \\ z' \end{pmatrix} \qquad (5.2)$$

(având în vedere că $X'_o = Y'_o = Z'_o = 0$ iar $R' = I$)

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X''_o \\ Y''_o \\ Z''_o \end{pmatrix} + \lambda'' R'' \begin{pmatrix} x'' \\ f \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\cos\varphi' \\ -B\sin\varphi' \\ Z_{o''} - Z_{o'} \end{pmatrix} + \lambda'' \begin{pmatrix} \cos(\varphi''-\varphi') & -\sin(\varphi''-\varphi') & 0 \\ \sin(\varphi''-\varphi') & \cos(\varphi''-\varphi') & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ f \\ z'' \end{pmatrix} \qquad (5.3)$$

Egalând primele două relaţii din (5.2) şi (5.3), se obţine un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute (λ' şi λ''):

$$\lambda' x' - \lambda''(x''\cos(\varphi'' - \varphi') - f\sin(\varphi'' - \varphi')) = B\cos\varphi'$$
$$\lambda' f - \lambda''(x''\sin(\varphi'' - \varphi') + f\cos(\varphi'' - \varphi')) = -B\sin\varphi'$$

de unde se poate obţine λ' prin regula lui Cramer (de ex.):

$$\lambda' = B\,\frac{(f\cos\varphi' + x''\sin\varphi')\cos(\varphi''-\varphi') + (x''\cos\varphi' - f\sin\varphi')\sin(\varphi''-\varphi')}{p\,f\cos(\varphi''-\varphi') + (x'x''+f^2)\sin(\varphi''-\varphi')}, \qquad (5.4)$$

unde $p = x' - x''$ este paralaxa orizontală (longitudinală).

Cu ajutorul lui λ' astfel determinat, se pot calcula coordonatele-teren X, Y, Z folosind relaţiile (5.2). Aceste relaţii vor servi la calculul coordonatelor-teren şi în celelalte trei cazuri menţionate în paragraful 5.1, dar factorul λ' dat de formula (5.4) va trebui particularizat corespunzător.

Astfel, în **cazul normal-convergent**, după cum se observă din figura 5.1.c, axa X coincide cu direcţia bazei (axa Y fiind pe direcţia de fotografiere din stânga) şi deci $\varphi' = 0$. În consecinţă, relaţia (5.4) se va particulariza pentru $\varphi' = 0$ şi dacă se notează $\varphi = \varphi''$, rezultă:

$$\lambda' = B\,\frac{f\cos\varphi + x''\sin\varphi}{p\,f\cos\varphi + (x'x'' + f^2)\sin\varphi}, \qquad (5.5)$$

sau, împărţind cu $\cos\varphi$ ($\neq 0$),

$$\lambda' = B\,\frac{f + x''\,tg\,\varphi}{p\,f + (x'x'' + f^2)\,tg\,\varphi} \qquad (5.6)$$

În **cazul fotogramelor paralel-decalate**, comparând figura 5.1.b cu figura 5.4.b se observă că $\varphi''-\varphi' = 0$ şi dacă se notează $\varphi = \varphi'$, relaţia (5.4) devine:

$$\lambda' = B\frac{f\cos\varphi + x''\sin\varphi}{pf} = \frac{B}{p}\left(\cos\varphi + \frac{x''}{f}\sin\varphi\right). \qquad (5.7)$$

În ceea ce priveşte **cazul normal**, cel mai frecvent utilizat în practică, acesta se poate obţine cel mai simplu din cazul precedent. Astfel, particularizând relaţia (5.7) pentru $\varphi = 0$ rezultă :

$$\lambda' = \frac{B}{p}. \qquad (5.8)$$

Prin urmare, în această situaţie, coordonatele-teren se pot calcula prin relaţii foarte simple :

$$\begin{cases} X = \dfrac{B}{p}x' \\ Y = \dfrac{B}{p}f \\ Z = \dfrac{B}{p}z' \end{cases} \qquad (5.9)$$

În cazul în care axele de fotografiere nu sunt orizontale, fiind înclinate cu un unghi ω în plan vertical (acelaşi pentru ambele fotograme), matricea R' va fi R_ω (din paragraful A.2.2.a_3) şi prin urmare relaţiile (5.2) vor deveni :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \lambda' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ f \\ z' \end{pmatrix} = \lambda' \begin{pmatrix} x' \\ f\cos\omega - z'\sin\omega \\ f\sin\omega + z'\cos\omega \end{pmatrix}. \qquad (5.10)$$

De asemenea, matricea R'' va fi dată de produsul $R_\omega \cdot R_{\varphi''-\varphi'}$, iar relaţiile (5.3) se vor scrie sub forma:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\cos\varphi' \\ -B\sin\varphi' \\ Z_{o''} - Z_{o'} \end{pmatrix} + \lambda'' \begin{pmatrix} \cos(\varphi''-\varphi') & -\sin(\varphi''-\varphi') & 0 \\ \cos\omega\sin(\varphi''-\varphi') & \cos\omega\cos(\varphi''-\varphi') & -\sin\omega \\ \sin\omega\sin(\varphi''-\varphi') & \sin\omega\cos(\varphi''-\varphi') & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ f \\ z'' \end{pmatrix}. \qquad (5.11)$$

Egalând (ca şi în cazul prezentat anterior) primele două relaţii din (5.10) şi (5.11) se poate obţine un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute (λ' şi λ''), de unde se poate obţine λ' sub forma:

Scanned with OKEN Scanner

$$\lambda' = B((f\cos\omega\cos\varphi' + x''\sin\varphi')\cos(\varphi''-\varphi') + (x''\cos\omega\cos\varphi' - f\sin\varphi')\sin(\varphi''-\varphi') - z''\sin\omega\cos\varphi') / ((p\,f\cos\omega + z'x''\sin\omega)\cos(\varphi''-\varphi') + ((x'x'' + f^2)\cos\omega - z'f\sin\omega)\sin(\varphi''-\varphi') - x'z''\sin\omega) \; ; \qquad (5.12)$$

p fiind paralaxa longitudinală.

În cazul normal-convergent, această relație se va particulariza pentru $\varphi' = 0$ și notând $\varphi = \varphi''$, rezultă:

$$\lambda' = \frac{B\,(f\cos\omega\cos\varphi + x''\cos\omega\sin\varphi - z''\sin\omega)}{(p\,f\cos\omega + z'x''\sin\omega)\cos\varphi + ((x'x'' + f^2)\cos\omega - z'f\sin\omega)\sin\varphi - x'z''\sin\omega)} . \qquad (5.13)$$

Pentru cazul fotogramelor paralel-decalate, diferența $\varphi''-\varphi' = 0$ și notând $\varphi=\varphi'=\varphi''$ factorul λ' devine:

$$\lambda' = B\frac{f\cos\omega\cos\varphi + x''\sin\varphi - z''\sin\omega\cos\varphi}{p\,f\cos\omega + z'x''\sin\omega - x'z''\sin\omega} = B\frac{(f\cos\omega - z''\sin\omega)\cos\varphi + x''\sin\varphi}{p\,f\cos\omega + (z'x'' - x'z'')\sin\omega} . \qquad (5.14)$$

În sfârșit, în cazul normal, particularizând relația precedentă pentru $\varphi = 0$, se obține :

$$\lambda' = B\frac{f\cos\omega - z''\sin\omega}{p\,f\cos\omega + (z'x'' - x'z'')\sin\omega} . \qquad (5.15)$$

Coordonatele-teren X,Y,Z se vor determina cu relațiile (5.10), folosind pentru λ' formula corespunzătoare cazului concret.

5.3. Precizia de determinare a coordonatelor-teren

Precizia cu care se pot obține coordonatele spațiale X,Y,Z (pe baza formulelor deduse în paragraful precedent) depinde în principiu de erorile orientării interioare și exterioare a fotogramelor și de erorile de măsurare a coordonatelor și paralaxelor.

Considerând - pentru simplificare - cazul normal, în care coordonatele-teren sunt date de relațiile (5.9), dintre elementele menționate aici apar: distanța focală f, baza B, coordonatele-imagine x',z' și paralaxa longitudinală p. Conform legii de

propagare a erorilor exprimată prin formula (C.15), erorile coordonatelor-teren vor fi date de relaţiile:

$$\begin{cases} m_X = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial B}\right)^2 m_B^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial x'}\right)^2 m_{x'}^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial p}\right)^2 m_p^2} \\ m_Y = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial Y}{\partial B}\right)^2 m_B^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial f}\right)^2 m_f^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial p}\right)^2 m_p^2} \\ m_Z = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial B}\right)^2 m_B^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial z'}\right)^2 m_{z'}^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right)^2 m_p^2} \end{cases} \qquad (5.16)$$

Concretizând derivatele parţiale, dând ca factori comuni (sub radicali) respectiv expresiile

$$\frac{B^2 x'^2}{p^4}, \frac{1}{p^2}, \frac{B^2 z'^2}{p^4}$$

şi având în vedere că din formulele (5.9) se pot deduce egalităţile

$$\frac{1}{p} = \frac{Y}{Bf}, \quad \frac{p}{B} = \frac{f}{Y}, \quad \frac{p}{x'} = \frac{B}{X}, \quad \frac{p}{z'} = \frac{B}{Z}$$

relaţiile (5.16) vor căpăta forma:

$$\begin{cases} m_X = \pm\frac{XY}{Bf}\sqrt{\frac{f^2}{Y^2} m_B^2 + \frac{B^2}{X^2} m_{x'}^2 + m_p^2} \\ m_Y = \pm\frac{Y}{Bf}\sqrt{f^2 m_B^2 + B^2 m_f^2 + Y^2 m_p^2} \\ m_Z = \pm\frac{YZ}{Bf}\sqrt{\frac{f^2}{Y^2} m_B^2 + \frac{B^2}{Z^2} m_{z'}^2 + m_p^2} \end{cases} \qquad (5.17)$$

Dacă se ţine seama de faptul că precizia coordonatelor X şi Z este influenţată în principal de erorile $m_{x'}$ şi respectiv $m_{z'}$, iar precizia ordonatei Y depinde în primul rând de eroarea paralaxei m_p, se poate scrie:

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{cases} m_X \approx \pm \dfrac{Y}{f} m_{x'} \\ m_Y \approx \pm \dfrac{Y^2}{Bf} m_p \\ m_Z \approx \pm \dfrac{Y}{f} m_{z'} \end{cases} \qquad (5.18)$$

După cum se poate observa, erorile cresc cu profunzimea Y, iar pentru direcţia Y chiar cu pătratul acesteia. Pe de altă parte, precizia se poate îmbunătăţi prin mărirea distanţei focale şi a lungimii bazei de fotografiere (evident, în anumite limite).

Având în vedere că precizia de măsurare la stereocomparator se poate considera de 0,01 mm şi luând (pentru exemplificare) $f = 200$ mm, $B = 50$ m, iar distanţa medie de fotografiere $Y = 400$ m, rezultă $m_X = m_Z = 0{,}02$ m şi $m_Y = 0{,}16$ m.

Precizia de determinare a coordonatelor-teren ale punctelor se îmbunătăţeşte şi se omogenizează dacă la orientarea exterioară a fotogramelor se utilizează puncte de sprijin (de reper).

Evident însă, pentru a obţine o precizie sporită va trebui realizată o compensare riguroasă prin metoda pătratelor minime şi care va fi prezentată în paragraful următor.

5.4. Tratarea riguroasă

În acest caz, se are în vedere faptul că atât coordonatele-imagine cât şi elementele de orientare exterioară sunt mărimi măsurate şi vor primi corecţii v. Pe de altă parte, coordonatele punctelor din spaţiul-obiect obţinute de exemplu cu formulele deduse în paragraful 5.2 pot fi considerate ca valori aproximative, ce vor primi corecţii dX, dY, dZ.

Referitor la coordonatele-imagine mai trebuie precizat că ele se consideră corectate (în prealabil) de influenţa principalelor surse de erori sistematice, cu observaţia că refracţia nu mai intervine în acelaşi mod ca şi în cazul fotogramelor aeriene, ci similar observaţiilor geodezice.

Compensarea se realizează pe baza ecuaţiilor condiţiei de coliniaritate (3.8), care vor fi scrise în acest caz sub forma:

$$x' = f\frac{r_{11}(X-X_o) + r_{21}(Y-Y_o) + r_{31}(Z-Z_o)}{r_{12}(X-X_o) + r_{22}(Y-Y_o) + r_{32}(Z-Z_o)},$$

$$z' = f\frac{r_{13}(X-X_o) + r_{23}(Y-Y_o) + r_{33}(Z-Z_o)}{r_{12}(X-X_o) + r_{22}(Y-Y_o) + r_{32}(Z-Z_o)}, \qquad (5.19)$$

reprezentând două funcţii ce pot fi exprimate prin determinanţi de ordinul doi:

$$\begin{cases} F_1 \equiv \begin{vmatrix} x' & f \\ r_{11}(X-X_o)+r_{21}(Y-Y_o)+r_{31}(Z-Z_o) & r_{12}(X-X_o)+r_{22}(Y-Y_o)+r_{32}(Z-Z_o) \end{vmatrix} = 0 \\ F_2 \equiv \begin{vmatrix} z' & f \\ r_{13}(X-X_o)+r_{23}(Y-Y_o)+r_{33}(Z-Z_o) & r_{12}(X-X_o)+r_{22}(Y-Y_o)+r_{32}(Z-Z_o) \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \qquad (5.20)$$

similar relaţiilor (3.20).

Având în vedere că aceste ecuaţii conţin atât mărimi măsurate, cât şi coordonate necunoscute, se va utiliza cazul general de compensare prin metoda pătratelor minime (descris în paragraful C.2.5), sistemul de ecuaţii liniarizate având forma (C.133) :

$$A\,V + B\,\Delta - W = O\,. \qquad (5.21)$$

Deoarece mărimile măsurate sunt de două feluri: coordonate-imagine, care vor primi corecţii pentru fiecare punct din fiecare fotogramă şi elemente de orientare, care vor primi corecţii pentru fiecare fotogramă, primul termen din (5.21) se poate scrie sub forma:

$$AV = \dot{A}\dot{V} + \ddot{A}\ddot{V}\,.$$

Astfel, fiecărui punct i măsurat pe fotograma k îi va corespunde o submatrice

$$\dot{A}_i^k = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x'}\right)^o & \left(\frac{\partial F_1}{\partial z'}\right)^o \\ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x'}\right)^o & \left(\frac{\partial F_2}{\partial z'}\right)^o \end{pmatrix}_i^k = \begin{pmatrix} (Y-Y_o)^o & 0 \\ 0 & (Y-Y_o)^o \end{pmatrix}_i^k$$

şi un vector

$$\dot{V}_i^k = \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{z'} \end{pmatrix}_i^k$$

iar fiecărei fotograme k îi va corespunde (pentru fiecare punct i) o submatrice

$$\ddot{A}_i^k = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \omega}\right)^o & \left(\frac{\partial F_1}{\partial \varphi}\right)^o & \left(\frac{\partial F_1}{\partial \kappa}\right)^o & \left(\frac{\partial F_1}{\partial X_o}\right)^o & \left(\frac{\partial F_1}{\partial Y_o}\right)^o & \left(\frac{\partial F_1}{\partial Z_o}\right)^o \\ \left(\frac{\partial F_2}{\partial \omega}\right)^o & \left(\frac{\partial F_2}{\partial \varphi}\right)^o & \left(\frac{\partial F_2}{\partial \kappa}\right)^o & \left(\frac{\partial F_2}{\partial X_o}\right)^o & \left(\frac{\partial F_2}{\partial Y_o}\right)^o & \left(\frac{\partial F_2}{\partial Z_o}\right)^o \end{pmatrix}_i^k =$$

$$= \begin{pmatrix} x'(Z-Z_o)^o & f(Z-Z_o)^o & -x'(X-X_o)^o - f(Y-Y_o)^o & f & -x' & 0 \\ z'(Z-Z_o)^o + f(Y-Y_o)^o & -f(X-X_o)^o & -z'(X-X_o)^o & 0 & -z' & f \end{pmatrix}_i^k$$

şi un vector

$$\ddot{V}^{k\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} v_\omega & v_\varphi & v_\kappa & v_{X_o} & v_{Y_o} & v_{Z_o} \end{pmatrix}^k .$$

Pe de altă parte, pentru fiecare punct i din fotograma k se va putea forma o submatrice

$$B_i^k = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial F_1}{\partial X}\right)^o & \left(\frac{\partial F_1}{\partial Y}\right)^o & \left(\frac{\partial F_1}{\partial Z}\right)^o \\ \left(\frac{\partial F_2}{\partial X}\right)^o & \left(\frac{\partial F_2}{\partial Y}\right)^o & \left(\frac{\partial F_2}{\partial Z}\right)^o \end{pmatrix}_i^k = \begin{pmatrix} -f & x' & 0 \\ 0 & z' & -f \end{pmatrix}_i^k$$

şi un vector

$$\Delta_i^{\mathrm{T}} = (dX \;\; dY \;\; dZ)_i .$$

Termenul liber va rezulta prin particularizarea celor două funcţii pentru valorile măsurate ale coordonatelor-imagine şi ale parametrilor de orientare şi pentru valorile aproximative calculate ale coordonatelor-teren ale punctelor:

$$-W_i^k = \begin{pmatrix} F_1^o \\ F_2^o \end{pmatrix}_i^k = \begin{pmatrix} x'(Y-Y_o)^o - f(X-X_o)^o \\ z'(Y-Y_o)^o - f(Z-Z_o)^o \end{pmatrix}_i^k .$$

În consecinţă, ecuaţia corespunzătoare unui punct i măsurat pe fotograma k va avea forma:

Scanned with OKEN Scanner

$$\underset{(2,2)}{\dot{A}_i^k}\ \underset{(2,1)}{\dot{V}_i^k} + \underset{(2,6)}{\ddot{A}_i^k}\ \underset{(6,1)}{\ddot{V}^k} + \underset{(2,3)}{B_j^k}\ \underset{(3,1)}{\Delta_i} - \underset{(2,1)}{W_i^k} = \underset{(2,1)}{O} \ . \qquad (5.22)$$

Pe de altă parte, pentru fiecare punct de sprijin j se vor scrie câte 3 ecuaţii :

$$\begin{aligned} X_j + v_{X_j} &= X_j^o + dX_j \ , \\ Y_j + v_{Y_j} &= Y_j^o + dY_j \ , \\ Z_j + v_{Z_j} &= Z_j^o + dZ_j \ . \end{aligned} \qquad (5.23)$$

Notând cu

$$\ddot{V}_j^T = (v_X \ v_Y \ v_Z)_j \ ,$$

vectorul corecţiilor coordonatelor-teren măsurate X_j, Y_j, Z_j, cu

$$\Delta_j^T = (dX \ dY \ dZ)_j \ ,$$

vectorul corecţiilor coordonatelor calculate X_j^o, Y_j^o, Z_j^o şi cu

$$(W'_j)^T = (X_j^o - X_j \ , \ Y_j^o - Y_j \ , \ Z_j^o - Z_j)$$

diferenţele coordonatelor corespunzătoare, relaţiile (5.23) se pot scrie sub forma:

$$\ddot{V}_j - \Delta_j - W'_j = O \ . \qquad (5.24)$$

Presupunând (din raţiuni de generalitate şi pentru uşurinţa formulării matematice) că fiecare punct i (din cele n puncte din teren) apare pe toate cele m fotograme, ecuaţiile (5.22) corespunzătoare acestui punct vor avea următoarea formă matriceală:

$$\begin{pmatrix} \dot{A}_i^1 & & \\ & \dot{A}_i^2 & \\ & & \ddots \\ & & \dot{A}_i^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{V}_i^1 \\ \dot{V}_i^2 \\ \vdots \\ \dot{V}_i^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddot{A}_i^1 & & \\ & \ddot{A}_i^2 & \\ & & \ddots \\ & & \ddot{A}_i^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{V}^1 \\ \ddot{V}^2 \\ \vdots \\ \ddot{V}^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_i^1 \\ B_i^2 \\ \vdots \\ B_i^m \end{pmatrix} \underset{(3,1)}{\Delta_i} - \begin{pmatrix} W_i^1 \\ W_i^2 \\ \vdots \\ W_i^m \end{pmatrix} = \underset{(2m,1)}{O} \qquad (5.25)$$

sau, în expresie simplificată,

$$\underset{(2m,2m)}{\dot{A}_i} \cdot \underset{(2m,1)}{\dot{V}_i} + \underset{(2m,6m)}{\ddot{A}_i} \ \underset{(6m,1)}{\ddot{V}} + \underset{(2m,3)}{B_i} \cdot \underset{(3,1)}{\Delta_i} - \underset{(2m,1)}{W_i} = \underset{(2m,1)}{O} \ . \qquad (5.26)$$

Setul complet de ecuaţii pentru toate cele n puncte va fi:

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{pmatrix} \dot{A}_1 & & \\ & \dot{A}_2 & \\ & & \ddots \\ & & \dot{A}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \vdots \\ \dot{V}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddot{A}_1 \\ \ddot{A}_2 \\ \vdots \\ \ddot{A}_n \end{pmatrix} \underset{(6m,1)}{\ddot{V}} + \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & \ddots \\ & & B_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix} = \underset{(2mn,1)}{O} \tag{5.27}$$

sau, în expresie simplificată,

$$\underset{(2mn,2mn)}{\dot{A}} \cdot \underset{(2mn,1)}{\dot{V}} + \underset{(2mn,6m)}{\ddot{A}} \cdot \underset{(6m,1)}{\ddot{V}} + \underset{(2mn,3n)}{B} \cdot \underset{(3n,1)}{\Delta} - \underset{(2mn,1)}{W} = \underset{(2mn,1)}{O} \tag{5.28}$$

reprezentând sistemul de ecuaţii (5.21).

În ceea ce priveşte utilizarea punctelor de sprijin, presupunând (din aceleaşi motive menţionate anterior) că toate cele n puncte au coordonate obţinute prin măsurători (deci sunt puncte de reper) pe baza relaţiei (5.24), se pot scrie (sub formă matriceală) ecuaţiile:

$$\begin{pmatrix} \ddot{V}_1 \\ \ddot{V}_2 \\ \vdots \\ \ddot{V}_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} W'_1 \\ W'_2 \\ \vdots \\ W'_n \end{pmatrix} = \underset{(3n,1)}{O} \tag{5.29}$$

sau, în expresie simplificată,

$$\underset{(3n,1)}{\ddot{V}} - \underset{(3n,1)}{\Delta} - \underset{(3n,1)}{W'} = \underset{(3n,1)}{O} . \tag{5.30}$$

Sistemul format de ecuaţiile (5.28) şi (5.30) va reprezenta modelul matematic complet:

$$\begin{cases} \dot{A} \cdot \dot{V} + \ddot{A} \cdot \ddot{V} + B \cdot \Delta - W = O \\ \ddot{V} - \Delta - W' = O \end{cases}$$

şi care poate fi scris sub forma

$$\begin{pmatrix} \underset{(2mn,2mn)}{\dot{A}} & \underset{(2mn,6m)}{\ddot{A}} & \underset{(2mn,3n)}{O} \\ \underset{(3n,2mn)}{O} & \underset{(3n,6m)}{O} & \underset{(3n,3n)}{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underset{(2mn,1)}{\dot{V}} \\ \underset{(6m,1)}{\ddot{V}} \\ \underset{(3n,1)}{\dddot{V}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underset{(2mn,3n)}{B} \\ \underset{(3n,3n)}{-I} \end{pmatrix} \cdot \underset{(3n,1)}{\Delta} - \begin{pmatrix} \underset{(2mn,1)}{W} \\ \underset{(3n,1)}{W'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{(2mn,1)}{O} \\ \underset{(3n,1)}{O} \end{pmatrix}, \tag{5.31}$$

sau, concis,

$$\underset{(2mn+3n,2mn+6m+3n)}{\overline{A}} \quad \underset{(2mn+6m+3n,1)}{\overline{V}} + \underset{(2mn+3n,3n)}{\overline{B}} \cdot \underset{(3n,1)}{\Delta} - \underset{(2mn+3n,1)}{\overline{W}} = \underset{(2mn+3n,1)}{\overline{O}} . \qquad (5.32)$$

Având în vedere că măsurătorile la care se referă corecţiile $\overline{V}$ sunt de tipuri diferite (măsurători de coordonate şi paralaxe la stereocomparator, măsurători de unghiuri, lungimi, diferenţe de nivel în teren), este important de a se lua în consideraţie ponderile acestor măsurători (după cum se arată în paragrafele C.1.3.b şi C.2.1).

Structura matricei ponderilor va corespunde structurii vectorului $\overline{V}$, după cum rezultă din (5.31) şi (5.32), şi deci va fi de forma :

$$\underset{(2mn+6m+3n,2mn+6m+3n)}{P} = \begin{pmatrix} \dot{P} & & \\ & \ddot{P} & \\ & & \dddot{P} \end{pmatrix},$$

unde

$$\underset{(2mn,2mn)}{\dot{P}} = \begin{pmatrix} \dot{P}_1 & & & \\ & \dot{P}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \dot{P}_n \end{pmatrix}, \quad cu \quad \dot{P}_i = \begin{pmatrix} \dot{P}_i^1 & & & \\ & \dot{P}_i^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \dot{P}_i^m \end{pmatrix},$$

$$\underset{(6m,6m)}{\ddot{P}} = \begin{pmatrix} \ddot{P}^1 & & & \\ & \ddot{P}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddot{P}^m \end{pmatrix} \text{ şi } \underset{(3n,3n)}{\dddot{P}} = \begin{pmatrix} \dddot{P}_1 & & & \\ & \dddot{P}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \dddot{P}_n \end{pmatrix}.$$

Normalizarea şi rezolvarea sistemului de ecuaţii normale, ca şi calculul principalilor indicatori de precizie, se realizează în maniera descrisă la paragraful C.2.5.

6. AEROTRIANGULAŢIA ANALITICĂ

6.1. Introducere. Definiţii. Clasificări

După cum s-a putut remarca în capitolele 3 şi 4, pentru orientarea exterioară a fotogramelor respectiv a stereomodelelor individuale (în raport cu sistemul de coordonate al spaţiului-obiect) este necesară determinarea în teren a unui anumit număr de puncte de sprijin (de reper), care trebuie să îndeplinească anumite condiţii geometrice. Trebuie menţionat că deşi utilizarea punctelor corespondente este cea mai frecventă, pot fi folosite şi alte elemente de legătură (de ex. distanţe corespondente), având în vedere însă particularităţile pe care acestea le implică.

Pe de altă parte, utilizarea metodelor de exploatare fotogrammetrică se face de obicei pentru suprafeţe destul de mari, acoperite de un număr foarte mare de fotograme. Prin urmare, chiar dacă majoritatea punctelor vor fi comune mai multor fotograme (datorită acoperirilor acestora), rămâne un număr considerabil de puncte de sprijin care ar trebui determinate în teren.

Lucrările din teren reduc însă semnificativ randamentul metodelor fotogrammetrice şi, deşi ele nu pot fi eliminate complet, pot fi limitate la un minim strict necesar prin aerotriangulaţie. Astfel, majoritatea punctelor de sprijin se vor determina pe cale fotogrammetrică (în laborator) pe baza unui număr restrâns de puncte determinate în teren.

Prin urmare, **aerotriangulaţia spaţială** este un procedeu de îndesire fotogrammetrică a reţelei de sprijin - din punct de vedere planimetric şi altimetric - pe baza relaţiilor dintre fotogramele alăturate, rezultate din acoperirile acestora.

Evident, termenul de aerotriangulaţie face referire la utilizarea fotogramelor aeriene şi, deşi pare restrictiv, acesta este însă cazul general. Desigur, termenul echivalent de **fototriangulaţie** este mai larg şi poate fi folosit şi în cazul fotogramelor terestre. Totuşi, el este asociat de obicei cu varianta bidimensională: **fototriangulaţia plană** (care a fost dezvoltată îndeosebi prin metode grafice şi

Scanned with OKEN Scanner

mecanice). În continuare, se va avea în vedere în principal situaţia determinării tridimensionale a punctelor, prin aerotriangulaţie (fototriangulaţie) înţelegându-se aerotriangulaţia (sau fototriangulaţia) spaţială.

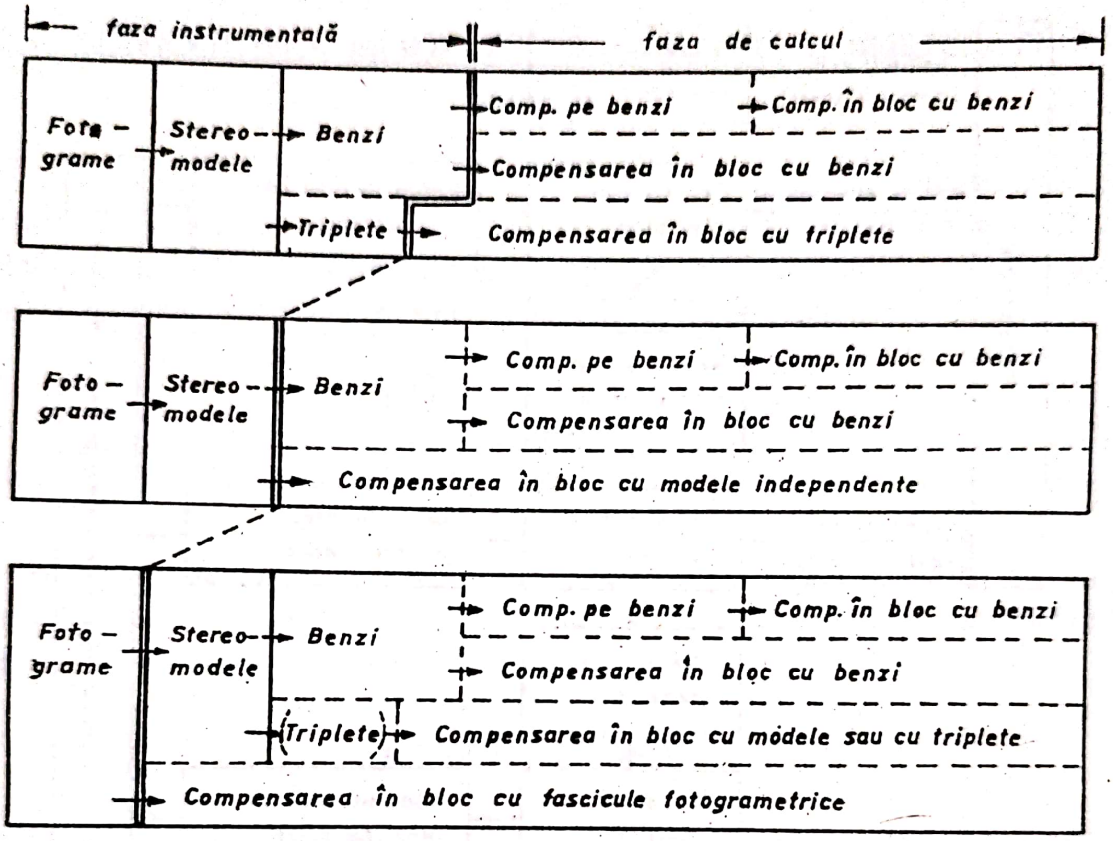

Figura 6.1. Clasificarea metodelor de aerotriangulaţie.

Referitor la **clasificarea metodelor de aerotriangulaţie** o reprezentare schematică sugestivă a fost dată de Ackermann (fig.6.1). În cele 3 variante prezentate se observă cum faza instrumentală se reduce în favoarea operaţiilor analitice, permiţând astfel limitarea propagării erorilor de măsurare şi în consecinţă mărirea preciziei rezultatelor finale. Aceasta a fost de altfel şi evoluţia metodelor de aerotriangulaţie, care au beneficiat treptat de mijloace de calcul tot mai performante.

O altă schemă privind diferitele metode de aerotriangulaţie în fluxul lor tehnologic (conf. [12]) este prezentată în figura 6.2.

Trebuie precizat că în continuare, diferitele metode de aerotriangulaţie vor fi dezvoltate doar în ceea ce priveşte prelucrarea propriu-zisă, prelucrarea preliminară a datelor fiind tratată în capitolul 2. Pe de altă parte, principalele probleme privind pregătirea aerotriangulaţiei (alegerea, marcarea şi transpunerea punctelor) ca şi măsurarea coordonatelor şi paralaxelor vor fi tratate în capitolul 7, în legătură cu aparatele specifice fotogrammetriei analitice.

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, trebuie menţionat că dintre diferitele modalităţi de clasificare, s-a adoptat împărţirea aerotriangulaţiei după modul de compensare: pe benzi, sau în bloc.

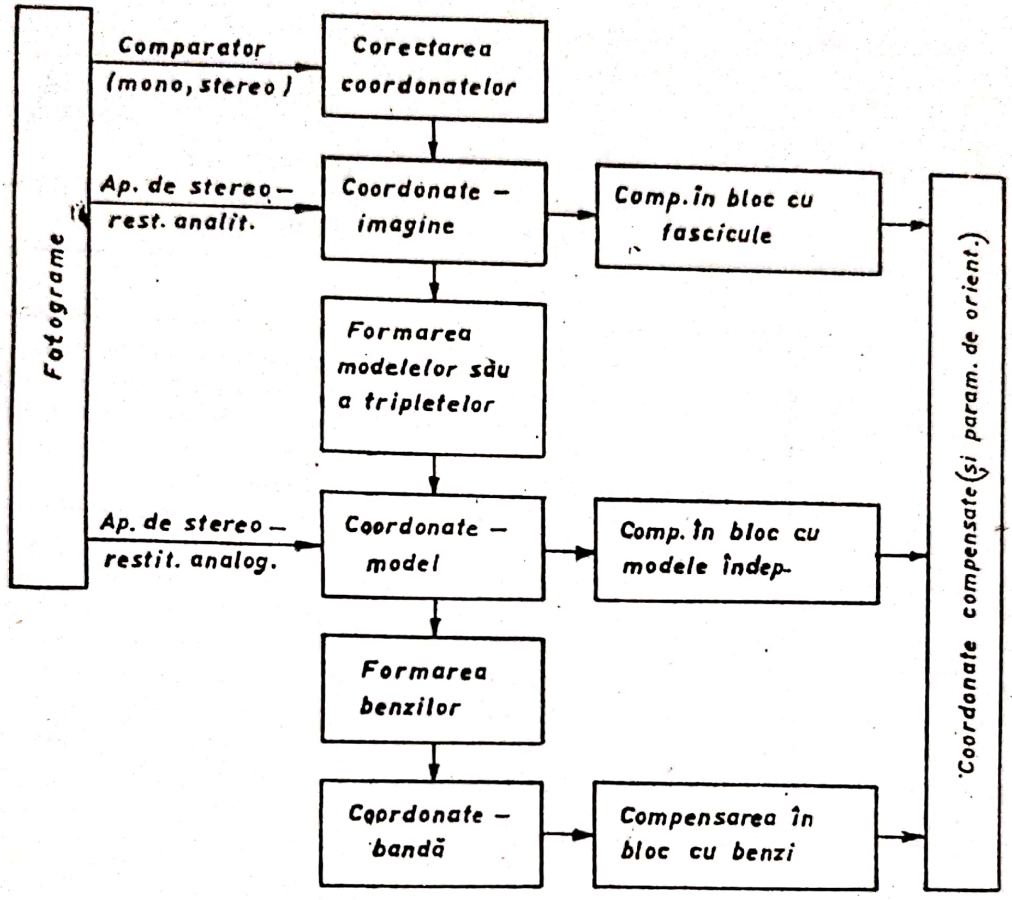
Fotograme
Comparator (mono, stereo)
Corectarea coordonatelor
Ap. de stereo – rest. analit.
Coordonate – imagine
Comp. în bloc cu fascicule
Formarea modelelor sau a tripletelor
Ap. de stereo – restit. analog.
Coordonate – model
Comp. în bloc cu modele indep.
Formarea benzilor
Coordonate – bandă
Compensarea în bloc cu benzi
Coordonate compensate (şi param. de orient.)

Figura 6.2. Fluxul tehnologic al diferitelor metode de aerotriangulaţie analitică.

6.2. Aerotriangulaţia pe benzi

Principalele etape pe care le comportă aerotriangulaţia pe benzi sunt:

- orientarea relativă şi formarea stereomodelelor individuale (simple sau duble);
- conexiunea (legarea) modelelor;
- orientarea absolută a stereomodelului general al benzii;
- compensarea benzii de aerotriangulaţie.

Având în vedere că problemele referitoare la orientarea relativă, formarea stereomodelului şi orientarea absolută au fost tratate în capitolul 4, aici vor fi

dezvoltate doar cele privind conexiunea modelelor şi compensarea benzilor de aerotriangulaţie.

6.2.1. CONEXIUNEA MODELELOR ANALITICE ORIENTATE ÎN SERIE

Conexiunea modelelor constă în principiu în transferul elementelor de orientare ale primului model (considerat de referinţă) de-a lungul benzii. Deci, problema care se pune constă în determinarea celor 7 parametri ai transformării conforme spaţiale pentru fiecare stereomodel în raport cu primul:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_j = m^k R^k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_j^k + \Delta^k \quad . \tag{6.1}$$

În această relaţie x,y,z (din membrul stâng) reprezintă coordonatele unui punct j în sistemul benzii (adică în sistemul primului model), iar k este indicele corespunzător unui anumit model din bandă.

a. Transferul scării

Pentru a obţine factorul de scară m^k ce se va aplica tuturor punctelor modelului k, va trebui să se calculeze mai întâi factorul de transfer a scării în raport cu modelul anterior ($m^{k,k-1}$). Având în vedere că la calculul coordonatelor-model s-au determinat factorii λ' şi λ'' (corespunzători fasciculului din stânga şi respectiv din dreapta) pentru fiecare punct (cu relaţiile 4.49), rezultă că pentru punctele comune se cunosc câte două valori şi anume λ'' din modelul $k-1$ şi λ' din modelul k (fig.6.3). Prin urmare, pentru fiecare punct comun la două stereomodele succesive $k-1$ şi k se poate calcula un factor de transfer cu formula:

$$m_j^{k,k-1} = \frac{(\lambda'')_j^{k-1}}{(\lambda')_j^k} \tag{6.2}$$

şi se va considera media acestor valori:

$$m^{k,k-1} = \frac{\sum_{j=1}^{n_c} m_j^{k,k-1}}{n_c} \tag{6.3}$$

n_c fiind numărul punctelor comune.

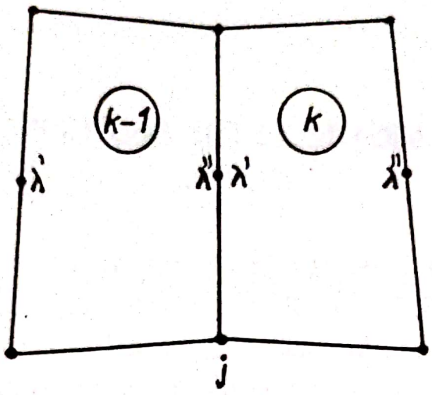

Figura 6.3. Transferul scării în cazul orientării în serie.

Având în vedere că se urmăreşte aducerea tuturor modelelor la scara primului stereomodel, factorii de transfer a scării corespunzători fiecărui model vor fi daţi de relaţiile:

$$\begin{aligned} m^1 &= 1 \\ m^2 &= m^{2,1} m^1 \\ m^3 &= m^{3,2} m^2 \\ &\vdots \\ m^k &= m^{k-1,k} m^{k-1} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{6.4}$$

b. Transferul rotaţiilor

La formarea fiecărui stereomodel, în cadrul orientării relative în serie, primeşte rotaţii doar fotograma din dreapta (R''), care în modelul următor se va afla în stânga, fiind considerată de referinţa ($R' = I$). Prin urmare, fiecare stereomodel va trebui rotit cu R'' din modelul anterior pentru a-l aduce la orientarea acestuia, legat deja de primul model. În figura 6.4 se prezintă schematic legarea primelor două modele, cu linie punctată reprezentându-se situaţia anterioară rotaţiei.

Considerând orientarea spaţială a primului stereomodel de referinţă, rotaţiile pe care le va primi fiecare model vor fi date de relaţiile:

Scanned with OKEN Scanner

$$
\begin{aligned}
R^1 &= I \qquad \text{(matricea unitate)} \\
R^2 &= \left(R''\right)^1 R^1 \\
R^3 &= \left(R''\right)^2 R^2 \\
&\vdots \\
R^k &= \left(R''\right)^{k-1} R^{k-1} \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

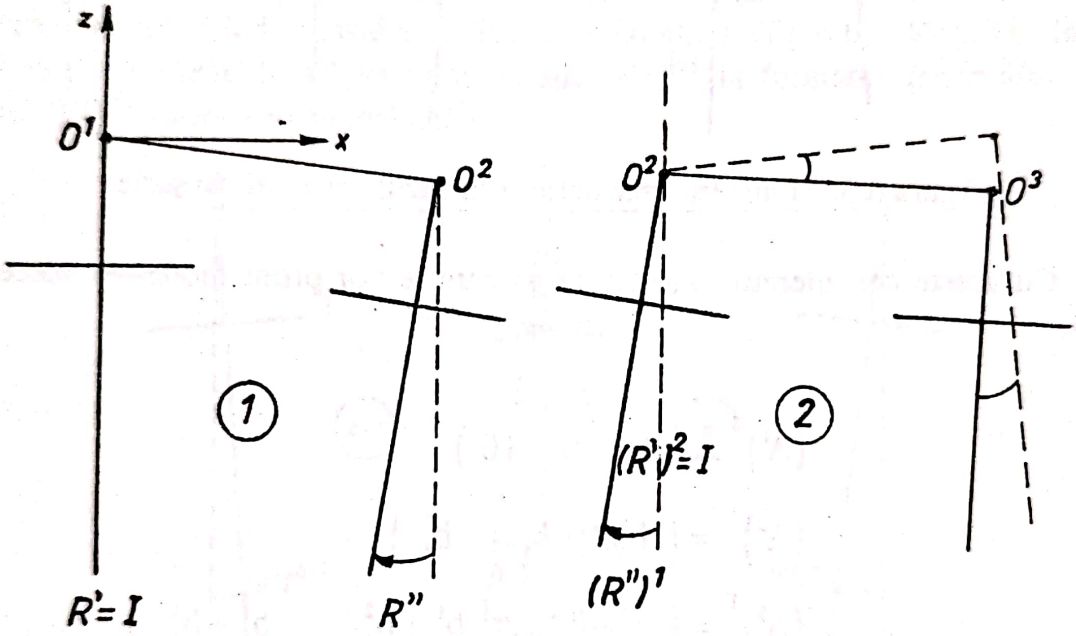

Figura 6.4. Transferul rotaţiilor în cazul orientării în serie.

c. Transferul translaţiilor

În urma orientării relative, fiecare stereomodel va avea anumite valori ale componentelor bazei (b''_x, b''_y, b''_z) reprezentând coordonatele centrului de perspectivă din dreapta, în raport cu cel din stânga considerat ca origine a sistemului de coordonate-model (fig.6.5). Deoarece aceste valori corespund scării şi orientării stereomodelului respectiv, ele vor trebui aduse întâi la scara şi orientarea primului model:

$$
\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}^k = m^k R^k \begin{pmatrix} b''_x \\ b''_y \\ b''_z \end{pmatrix}^k . \tag{6.6}
$$

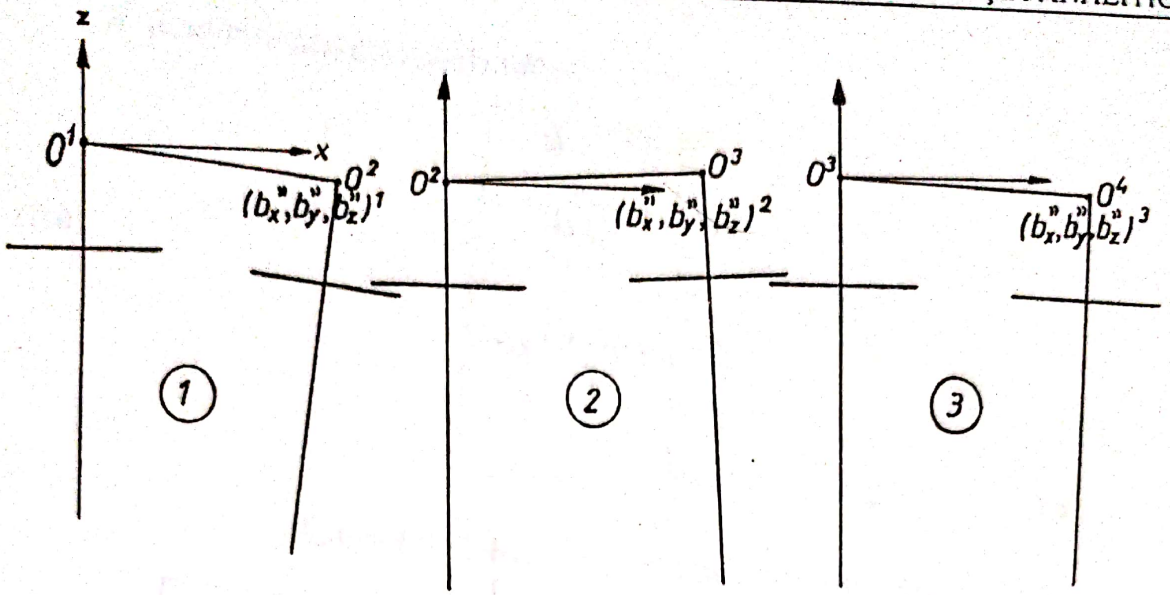

Figura 6.5. Transferul translaţiilor în cazul orientării în serie.

Cu aceste consideraţii, translaţiile pe care le vor primi modelele succesive vor fi:

$$
\begin{aligned}
\left(\Delta^1\right)^T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\left(\Delta^2\right)^T &= \begin{pmatrix} b_x^1 & b_y^1 & b_z^1 \end{pmatrix} \\
\left(\Delta^3\right)^T &= \begin{pmatrix} b_x^1 + b_x^2 & b_y^1 + b_y^2 & b_z^1 + b_z^2 \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
\left(\Delta^k\right)^T &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k-1} b_x^i & \sum_{i=1}^{k-1} b_y^i & \sum_{i=1}^{k-1} b_z^i \end{pmatrix} \\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad (6.7)
$$

Trebuie menţionat că în cazul în care primul stereomodel este orientat absolut (dispunând de 3 puncte de sprijin), m^1 şi R^1 vor fi elementele acestei orientări, relaţiile de recurenţă deduse anterior ţinând seama de această posibilitate.

Cunoscând cei 7 parametri ai transformării fiecărui model, vor putea fi calculate coordonatele x,y,z ale tuturor punctelor în sistemul benzii cu relaţiile (6.1). Pentru punctele comune la două stereomodele alăturate, se vor considera mediile perechilor de valori obţinute (dacă diferenţele lor nu depăşesc o anumită toleranţă).

Scanned with OKEN Scanner

6.2.2. CONEXIUNEA MODELELOR ANALITICE ORIENTATE INDEPENDENT

În principiu, problema care se pune este aceeaşi ca şi în paragraful precedent şi anume determinarea celor 7 parametri ai transformării conforme spaţiale pentru fiecare stereomodel în raport cu primul, pe baza relaţiei (6.1). Rezolvarea acestei probleme se va face însă diferit, având în vedere specificul orientării relative independente. Astfel, în acest caz, poziţia reciprocă a celor două fotograme se determină în raport cu baza, care se alege ca axă x a sistemului de coordonate-model. Prin urmare, cele două fascicule vor primi rotaţiile R' şi respectiv R'', baza fiecărui model fiind considerată iniţial orizontală (fig.6.6). Rezultă deci că fasciculul cu vârful în O^k va primi rotaţia $(R'')^{k-1}$ la formarea modelului *k-1* şi rotaţia $(R')^k$ la formarea modelului *k*.

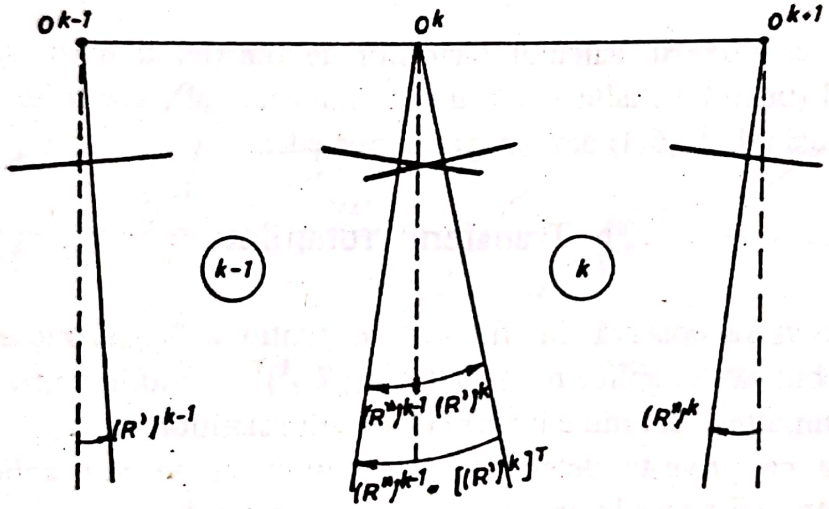

Figura 6.6. Transferul rotaţiilor în cazul orientării independente.

a. Transferul scării

Pentru a calcula factorul de transfer a scării, vor trebui rotite (provizoriu) cele două stereomodele astfel încât fasciculul cu vârful în O^k să revină în poziţia iniţială. Deci, se va aplica modelului *k-1* o rotaţie $((R'')^{k-1})^T$ în jurul vârfului din dreapta (făcând translaţia x-b_x), iar modelului *k* i se va aplica o rotaţie $((R')^k)^T$ în jurul vârfului din stânga. În această situaţie, factorul de transfer a scării se va putea obţine prin compararea cotelor corespondente în punctele comune:

$$m_j^{k,k-1} = \frac{z_j^{k-1}}{z_j^k} \quad , \tag{6.8}$$

luându-se apoi media acestor valori conform relaţiei (6.3).

Având în vedere că interesează doar cotele transformate, va fi suficient ca rotaţiile menţionate să se limiteze la acestea, adică:

$$z_j^{k-1} = \begin{pmatrix} r''_{13} & r''_{23} & r''_{33} \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} x_j - b_x \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}_{in.}^{k-1},$$

respectiv

$$z_j^{k} = \begin{pmatrix} r'_{13} & r'_{23} & r'_{33} \end{pmatrix}^{k} \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}_{in.}^{k}$$

În ceea ce priveşte calculul factorilor de transfer a scării corespunzători fiecărui model (pentru a-l aduce la scara primului model), acesta se va putea face pe baza aceloraşi relaţii (6.4) din paragraful precedent.

b. Transferul rotaţiilor

După cum se observă din figura 6.6, pentru a "lega" modelul k de cel anterior va trebui să i se aplice rotaţia $(R'')^{k-1}((R')^k)^T$, având în vedere că matricele de rotaţie se înmulţesc în ordine inversă efectuării rotaţiilor.

În ceea ce priveşte determinarea rotaţiilor ce se vor aplica modelelor succesive pentru a fi aduse la orientarea spaţială a primului stereomodel, aceasta se va putea face pe baza relaţiilor:

$$\begin{aligned} R^1 &= I \\ R^2 &= (R'')^1 \left((R')^2\right)^T R^1 \\ R^3 &= (R'')^2 \left((R')^3\right)^T R^2 \\ &\vdots \\ R^k &= (R'')^{k-1} \left((R')^k\right)^T R^{k-1} \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (6.9)$$

c. Transferul translaţiilor

În cazul orientării relative independente, datorită modului de definire a sistemului de coordonate-model, componentele b_y şi b_z ale bazei vor fi nule, iar b_x se poate alege arbitrar, de exemplu egal cu 1 şi va fi constant pentru toate modelele. Aceste consideraţii sunt valabile însă numai în raport cu sistemul propriu fiecărui model (fig.6.7). La formarea benzii, bazele (care pot fi considerate ca raze ale fasciculelor corespunzătoare) vor suferi transformările de scară şi rotaţii, proprii modelului respectiv:

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}^k = m^k R^k \begin{pmatrix} b_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (6.10)$$

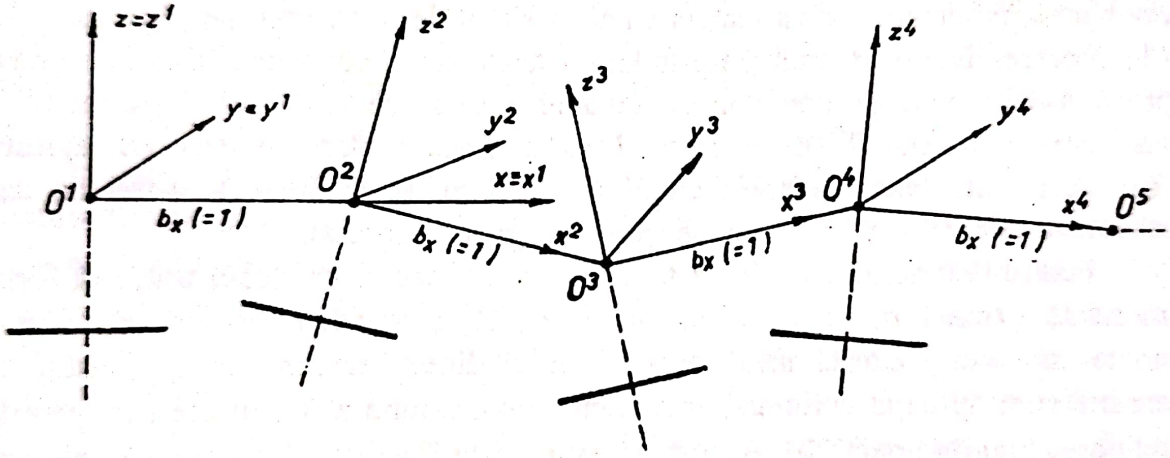

Figura 6.7. Transferul translaţiilor în cazul orientării independente.

Cu aceste observaţii, translaţiile pe care le vor primi modelele succesive vor fi:

$$\begin{aligned}
\left(\Delta^1\right)^T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\left(\Delta^2\right)^T &= \begin{pmatrix} b_x^1 & b_y^1 & b_z^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_x & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\left(\Delta^3\right)^T &= \begin{pmatrix} b_x^1 + b_x^2 & b_y^1 + b_y^2 & b_z^1 + b_z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_x + b_x^2 & b_y^2 & b_z^2 \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
\left(\Delta^k\right)^T &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k-1} b_x^i & \sum_{i=1}^{k-1} b_y^i & \sum_{i=1}^{k-1} b_z^i \end{pmatrix} \\
&\vdots
\end{aligned} \qquad (6.11)$$

După cum s-a menţionat, de obicei se ia $b_x = 1$.

În cazul în care primul stereomodel este orientat absolut, sunt valabile consideraţiile din paragraful anterior privind m^1 şi R^1.

Cunoscând cei 7 parametri ai transformării fiecărui model, se vor putea calcula coordonatele x,y,z ale tuturor punctelor în sistemul benzii cu relaţiile (6.1). Deoarece în punctele comune la două stereomodele alăturate se vor obţine perechi de valori, se vor considera mediile acestora (dacă diferenţele lor nu depăşesc o anumită toleranţă).

6.2.3. CONEXIUNEA MODELELOR ANALOGICE INDEPENDENTE

În cazul orientării relative independente la aparatele de stereorestituţie dubluproiectoare, rezultă stereomodele având sisteme de coordonate independente. Conexiunea modelelor se va realiza ca şi în situaţiile anterioare pe baza relaţiilor (6.1), reprezentând o adaptare a formulelor transformării conforme tridimensionale. Spre deosebire însă de conexiunea modelelor analitice unde cei 7 parametri ai transformării puteau fi determinaţi (pentru fiecare stereomodel) cu ajutorul elementelor calculate în etapele anterioare, aici nu se dispune de astfel de date (orientarea relativă realizându-se pe cale analogică, la aparat).

Pentru determinarea celor 7 parametri necunoscuţi va trebui utilizată forma liniarizată a transformării conforme spaţiale (6.1) şi vor fi necesare (cel puţin) 3 puncte comune. Datorită însă acoperirii mici dintre stereomodele, punctele lor comune sunt aproape coliniare, implicând o conexiune slabă în ceea ce priveşte înclinarea longitudinală (Φ). Această situaţie poate fi evitată dacă se alege ca punct de legătură **centrul de proiecţie** comun care, împreună cu două puncte comune marginale (fig.6.8), asigură o bună conexiune a modelelor.

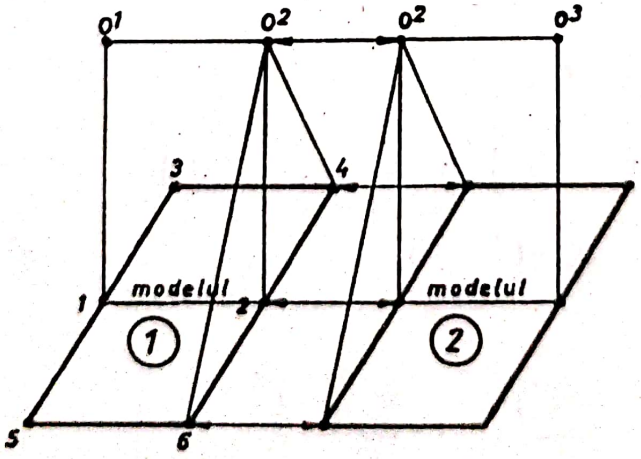

Figura 6.8. Conexiunea modelelor analogice independente.

Practic, conexiunea se realizează succesiv pentru fiecare pereche de modele în felul următor: primul stereomodel se consideră de referinţă (sistemul său va fi sistemul benzii) şi deci coordonatele punctelor O^2, 4 şi 6 vor figura în membrul stâng al relaţiilor (6.1) liniarizate, în timp ce în membrul drept se vor afla coordonatele aceloraşi puncte în sistemul celui de-al doilea stereomodel; după determinarea celor 7 parametri ai transformării, relaţiile (6.1) vor servi (în forma iniţială, neliniară) la calculul cordonatelor tuturor punctelor modelului al doilea în sistemul benzii; coordonatele punctelor de legătură cu modelul al treilea (astfel obţinute) vor trece în membrul stâng al unui nou set de ecuaţii (6.1) liniarizate, iar în membrul drept vor figura coordonatele aceloraşi puncte în sistemul celui de-al treilea stereomodel; se vor putea determina astfel parametrii transformării stereomodelului al treilea şi cu ajutorul lor se vor calcula coordonatele tuturor punctelor acestuia în sistemul benzii ş.a.m.d.

În esenţă, se poate spune că cei 7 parametri de transformare ai fiecărui model se obţin pe baza condiţiei ca valorile coordonatelor transformate (x,y,z) ale punctelor comune cu modelul precedent să fie egale cu coordonatele aceloraşi puncte din modelul anterior, adus deja în sistemul benzii. Adică, se pune condiţia ca în punctele comune să se obţină coordonate egale din ambele modele alăturate.

În ceea ce priveşte modul concret de determinare a celor 7 parametri necunoscuţi, se poate proceda ca în paragraful 4.3.3 (compensarea orientării absolute) cu observaţia că aici coordonatele punctelor din modelele care alcătuiesc banda nu se transformă în sistemul de coordonate-teren, ci în sistemul primului stereomodel. În consecinţă, diferenţele de scară şi de orientare spaţială ale acestor modele în raport cu primul fiind foarte mici, permit ca la transformarea fiecărui stereomodel să se poata considera $m^o = 1$ şi $R^o = I$. Deci, se va putea aplica direct transformarea iterativă (4.83), fără a mai face o transformare aproximativă preliminară, cu precizarea că în locul corecţiilor dX^i_o, dY^i_o, dZ^i_o se vor obţine chiar translaţiile X^i_o, Y^i_o, Z^i_o, această înlocuire fiind posibilă datorită faptului că translaţiile intervin liniar în relaţiile iniţiale (după cum se arată în paragraful A.2.2.b). Totuşi, dacă înaintea procesului iterativ se adaugă coordonatelor punctelor din fiecare model **translaţiile aproximative:**

$$\left(\Delta^1\right)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\Delta^2\right)^T = \begin{pmatrix} b_x & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\Delta^3\right)^T = \begin{pmatrix} 2b_x & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\left(\Delta^k\right)^T = \begin{pmatrix} (k-1)b_x & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

Scanned with OKEN Scanner

parametrii corespunzători vor interveni din nou sub forma diferenţială (dX_o^i, dY_o^i, dZ_o^i).

Referitor la valorile iniţiale X^o, Y^o, Z^o trebuie precizat că ele sunt coordonatele măsurate în modelul respectiv (eventual modificate cu translaţiile aproximative), urmând să fie transformate în procesul iterativ.

Pe de altă parte, deşi (pentru a evita confuziile) s-au folosit notaţiile din paragraful 4.3.3, se poate remarca faptul că (potrivit unei observaţii anterioare) în locul coordonatelor-teren X,Y,Z aici intervin coordonatele-model notate cu x,y,z.

La începutul acestui paragraf s-a arătat că pentru o bună conexiune a modelelor este necesară utilizarea centrelor de proiecţie ca puncte de legătură. Dacă însă la formarea benzii se utilizează modele duble (triplete) independente (fig.4.4), având o acoperire longitudinală de aprox. 66%, poate fi realizată o bună conexiune pe baza punctelor comune celor două stereomodele (duble), fără a mai recurge la centrele de proiecţie ca puncte de legătură.

Formarea unui astfel de stereomodel se poate realiza la un aparat universal de stereorestituţie, prevăzut cu posibilitatea orientării în serie. Operaţiile care se execută în acest scop au următoarea succesiune:

- orientarea relativă a fotogramei din stânga faţă de cea din mijlocul tripletei;
- măsurarea coordonatelor în stereomodelul format;
- orientarea relativă a fotogramei din dreapta faţă de fotograma din mijloc;
- aducerea la aceeaşi scară a celor două stereomodele (şi anume la scara modelului din stânga) pe baza punctelor comune (din zona de triplă acoperire a fotogramelor);
- măsurarea coordonatelor în cel de-al doilea stereomodel (cel din dreapta).

În ceea ce priveşte faza de calcul, aceasta se va desfăşura în acelaşi mod ca şi în cazul modelelor simple independente cu observaţia (menţionată deja) că nu mai este necesară utilizarea centrelor de proiecţie ca puncte de legătură, conexiunea realizându-se pe baza unor puncte (convenabil dispuse geometric) situate în zona comună a stereomodelelor duble succesive.

6.2.4. Compensarea benzilor de aerotriangulaţie

Datorită erorilor considerabile pe care le implică legarea modelelor în special în cazul benzilor lungi, modelul general al benzii prezintă deformaţii (curbură, torsiune etc.) care nu se manifestă liniar de-a lungul benzii, ci după

Scanned with OKEN Scanner

funcţii de grad superior. În plus, aceste deformaţii depăşesc considerabil erorile de măsurare şi au un caracter cvasisistematic.

Deşi au fost efectuate numeroase studii privind propagarea erorilor la alcătuirea unei benzi şi în consecinţă modul în care se deformează o bandă de aerotriangulaţie, metodele de compensare recomandate de diferiţi specialişti sunt sensibil diferite.

Cele mai multe procedee de compensare pe benzi folosesc formule de interpolare de gradul II, ale căror coeficienţi se determină pe baza discordanţelor $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ dintre coordonatele-teren ale punctelor de sprijin (X,Y,Z) şi coordonatele-model (x,y,z) ale aceloraşi puncte în sistemul benzii, transformate aproximativ în sistemul de coordonate-teren (de exemplu ca în paragraful 4.3.2), eventual şi cu compensarea orientării absolute a benzii (ca în paragraful 4.3.3). Se pot utiliza coordonate reduse la centrul de greutate al punctelor de sprijin, sau la unul din aceste puncte, sau la alte puncte corespondente (după cum se va vedea în continuare).

În cazul metodei recomandate de K. Schwidefsky, compensarea se execută separat pentru cele 3 coordonate pe baza unor polinoame de gradul II de forma:

$$\begin{aligned} \Delta x &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 && \equiv P_x, \\ \Delta y &= b_0 + b_1 y + b_2 xy + b_3 x^2 && \equiv P_y, \\ \Delta z &= c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 xy + c_4 x^2 && \equiv P_z. \end{aligned} \qquad (6.12)$$

Semnificaţiile termenilor din ultima relaţie (cea mai complexă) arată că la compensarea cotelor se au în vedere: translaţia pe directia z, înclinarea longitudinală a benzii, înclinarea transversală, torsiunea hiperbolică şi curbura parabolică a benzii. Pentru a putea controla şi corecta toate acestea, punctele de sprijin vor trebui dispuse ca în figura 6.9. Coordonatele este recomandabil să se reducă la punctul A (mijlocul segmentului R_1R_2).

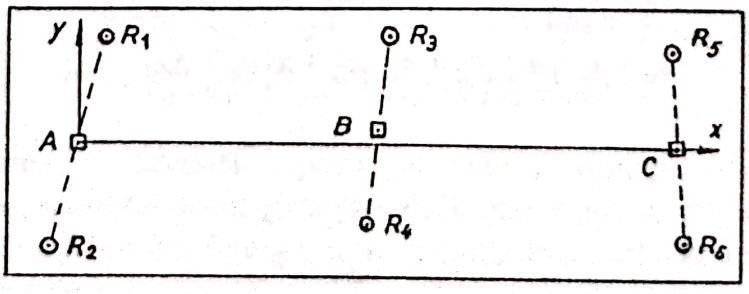

Figura 6.9. Dispunerea punctelor de sprijin într-o bandă de aerotriangulaţie.

Deoarece pentru fiecare punct se poate scrie câte o ecuaţie în x, una în y şi una în z, determinarea parametrilor necunoscuţi, adică a coeficienţilor polinomiali

se poate face aplicând principiul pătratelor minime. Astfel, pentru a afla coeficienţii polinomului P_x se poate forma un sistem de 6 ecuaţii cu 3 necunoscute, pentru P_y un sistem de 6 ecuaţii cu 4 necunoscute, iar pentru P_z un sistem de 6 ecuaţii cu 5 necunoscute. Deşi fiecare ecuaţie conţine atât necunoscute, cât şi mărimi măsurate, cazul general de compensare pe care l-ar implica această situaţie se poate reduce ca şi la orientarea absolută (v.paragraful 4.3.1), la aplicarea metodei măsurătorilor indirecte pentru obţinerea parametrilor necunoscuţi. Pentru aceasta se are în vedere că valorile coeficienţilor polinomiali fiind foarte mici, derivatele parţiale în raport cu mărimile măsurate (particularizate pentru valorile aproximative) se reduc practic la forma:

$$A_{x_i} = (1\ \ 0\ \ 0\ -1\ 0\ \ 0),$$
$$A_{y_i} = (0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ -1\ 0),$$
$$A_{z_i} = (0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ -1).$$

Observând că la fiecare din cele 3 sisteme, valorile măsurate $(x,y,z\ ;\ X,Y,Z)_i$, (comparabile numeric în urma transformării aproximative) şi corecţiile lor $(v_x,v_y,v_z;v_X,v_Y,v_Z)_i$ apar într-o singură ecuaţie (cea corespunzătoare punctului i), se vor putea introduce notaţiile (similare cu (4.72) şi în condiţiile precizate în paragraful 4.3.1):

$$v_{x_i} - v_{X_i} = -\overline{v}_{x_i},$$
$$v_{y_i} - v_{Y_i} = -\overline{v}_{y_i},$$
$$v_{z_i} - v_{Z_i} = -\overline{v}_{z_i}.$$

iar pe baza relaţiilor (6.12) se vor putea scrie ecuaţiile:

$$a_o + x_i a_1 + x_i^2 a_2 - \Delta x_i = \overline{v}_{x_i}$$
$$b_o + y_i b_1 + x_i y_i b_2 + x_i^2 b_3 - \Delta y_i = \overline{v}_{y_i}$$
$$c_o + x_i c_1 + y_i c_2 + x_i y_i c_3 + x_i^2 c_4 - \Delta z_i = \overline{v}_{z_i}$$

sau, mai general,

$$\begin{aligned} P_{x_i} - \Delta x_i &= \overline{v}_{x_i} \\ P_{y_i} - \Delta y_i &= \overline{v}_{y_i} \\ P_{z_i} - \Delta z_i &= \overline{v}_{z_i} \end{aligned} \qquad (6.13)$$

Scanned with OKEN Scanner

După determinarea valorilor coeficienţilor polinomiali, relaţiile (6.12) vor permite calculul corecţiilor Δx, Δy, Δz care se vor aplica tuturor punctelor benzii pentru a obţine coordonatele compensate ale acestora:

$$\begin{aligned} X &= x + \Delta x \ , \\ Y &= y + \Delta y \ , \\ Z &= z + \Delta z \ . \end{aligned} \tag{6.14}$$

După cum s-a menţionat anterior, cele 3 polinoame se pot prezenta sub diverse forme. Astfel, pe baza relaţiilor (A.47), (A.48), care pot fi scrise sub forma:

$$\begin{cases} \Delta x = a_o + a_1 x - b_1 y + a_2 x^2 - 2b_2 xy \\ \Delta y = b_o + b_1 x + a_1 y + b_2 x^2 + 2a_2 xy \end{cases} \tag{6.15}$$

$$\Delta z = c_o + c_1 x + c_2 y + c_3 x^2 + c_4 xy \tag{6.16}$$

se poate realiza o compensare separată planimetrie-altimetrie. Pentru planimetrie se poate aplica însă în locul relaţiilor (6.15) o transformare conformă de ordinul II (A.13):

$$\begin{cases} \Delta x = a_o + a_1 x - b_1 y + a_2 \left(x^2 - y^2 \right) - 2b_2 xy \\ \Delta y = b_o + b_1 x + a_1 y + b_2 \left(x^2 - y^2 \right) + 2a_2 xy \ . \end{cases} \tag{6.17}$$

Şi în aceste cazuri, dispunerea optimă a punctelor de sprijin este cea prezentată în figura 6.9.

Dintre formulele polinomiale de gradul III, se pot menţiona cele corespunzătoare metodei Zarzycki ce rezultă prin adăugarea termenului în x^2y relaţiilor (A.49):

$$\begin{aligned} \Delta x &= a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 y \ , \\ \Delta y &= b_o + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 y + b_4 xy + b_5 x^2 y \ , \\ \Delta z &= c_o + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 y + c_4 xy + c_5 x^2 y \ . \end{aligned} \tag{6.18}$$

Compensarea se execută separat pe cele 3 direcţii (ca şi la metoda Schwidefsky) dar, numărul necunoscutelor fiind mai mare, se recomandă ca cele 3 şiruri de puncte de sprijin din figura 6.9 să se completeze cu câte un punct situat în apropierea axei x a benzii.

Desigur, pot fi folosite şi alte formule polinomiale de gradul III, dar s-a constatat că se obţin rezultate mai bune când benzile de aerotriangulaţie nu sunt prea lungi şi se compensează cu formule de gradul II. Deci, construirea benzilor

Scanned with OKEN Scanner

lungi şi compensarea lor cu polinoame de grad superior care cer un număr mai mare de puncte de sprijin (dispuse după anumite criterii) conduce în general la rezultate mai slabe. De aceea este preferabil ca astfel de benzi să fie fragmentate şi să se compenseze cu formule de gradul II.

Mai trebuie menţionat că în cazul benzilor scurte (formate din maximum 6 fotograme) se poate considera că deformaţiile au un caracter liniar. În acest caz nu va mai fi necesară utilizarea unor formule polinomiale, fiind suficientă compensarea orientării absolute a benzii.

În fine, trebuie precizat că în general, exploatarea fotogrammetrică nu se limitează la o bandă de fotograme. Între benzi vor trebui deci să existe puncte de legătură transversală. Compensarea benzilor facându-se însă separat, aceste puncte vor primi coordonate duble, provenind din cele două benzi alăturate. Ele vor trebui însă mediate, dacă diferenţele lor nu depăşesc o anumită toleranţă. În caz contrar, ele vor fi considerate ca puncte distincte şi se vor renumerota.

6.3. Compensarea aerotriangulaţiei în bloc

Principala caracteristică a metodelor de compensare în bloc constă în folosirea tuturor relaţiilor dintre fotogramele alăturate, rezultate atât din acoperirile lor longitudinale, cât şi din cele transversale. Clasificarea acestor metode se poate face în funcţie de unităţile de compensare folosite şi anume: stereomodele generale pe benzi, modele stereoscopice (simple sau duble) independente şi fascicule fotogrammetrice spaţiale corespunzătoare fiecărei fotograme.

Trebuie precizat că spre deosebire de aerotriangulaţia pe benzi care presupunea formarea benzii şi apoi compensarea acesteia, în cazul de faţă unităţile de compensare se consideră constituite, urmând a fi doar compensate în bloc, pe baza punctelor comune.

6.3.1. COMPENSAREA ÎN BLOC CU BENZI

În acest caz, ca unitate de compensare se consideră stereomodelul general al fiecărei benzi. Spre deosebire de compensarea individuală a benzilor, aici toate benzile formând un bloc vor fi compensate simultan pe baza unor formule polinomiale de gradul II (eventual III):

Scanned with OKEN Scanner

$$\Delta x = P_x \ ,$$
$$\Delta y = P_y \ ,$$
$$\Delta z = P_z \ .$$

Aceste polinoame, notate generic, pot avea diferite forme, ca de exemplu (6.12), (6.15) sau (6.17) cu (6.16), (6.18) ş.a. Coeficienţii acestor polinoame, proprii fiecărei benzi k, se determină în bloc pe baza **discordanţelor absolute** $\Delta x_i^k, \Delta y_i^k, \Delta z_i^k$ (dintre coordonatele-teren şi coordonatele-model general transformate ale punctelor de sprijin) şi a **discordanţelor relative** $\Delta x_j^{k-1,k}, \Delta y_j^{k-1,k}, \Delta z_j^{k-1,k}$ (dintre coordonatele punctelor de legătură în două benzi alăturate, după ce au fost aduse toate benzile într-un sistem comun).

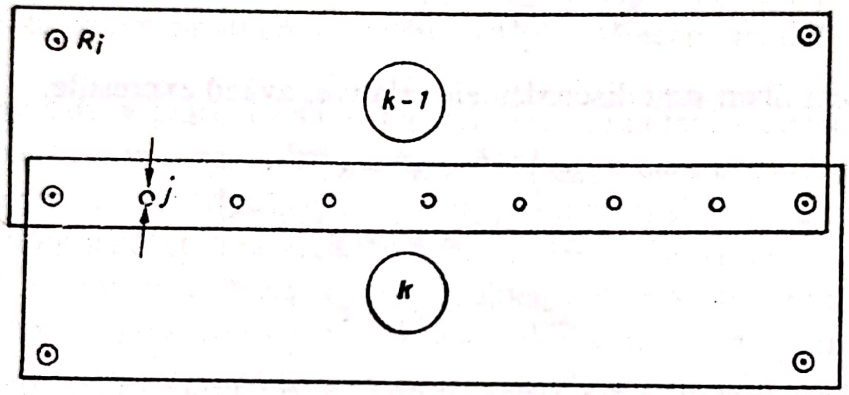

Figura 6.10. Compensarea benzilor în bloc.

Prin urmare, se vor putea scrie două tipuri de ecuaţii de corecţii. Pentru punctele de reper R_i (fig.6.10), acestea vor avea forma (6.13):

$$P_{x_i}^k - \Delta x_i^k = \overline{v}_{x_i}^k \ ,$$
$$P_{y_i}^k - \Delta y_i^k = \overline{v}_{y_i}^k \ , \qquad (6.19)$$
$$P_{z_i}^k - \Delta z_i^k = \overline{v}_{z_i}^k \ .$$

unde $\overline{v}_{x_i}, \overline{v}_{y_i}, \overline{v}_{z_i}$ au semnificaţiile date de relaţiile (4.72), în condiţiile precizate în paragraful 4.3.1.

Pentru punctele de conexiune, ecuaţiile vor fi scrise pe baza condiţiei ca valorile coordonatelor compensate ale unui punct de legătură j (fig.6.10) obţinute din două benzi alăturate să fie egale, adică:

Scanned with OKEN Scanner

$$X_j^{k-1}-X_j^k=\left(x_j^{k-1}+\Delta x_j^{k-1}\right)-\left(x_j^k+\Delta x_j^k\right)=0\ ,$$
$$Y_j^{k-1}-Y_j^k=\left(y_j^{k-1}+\Delta y_j^{k-1}\right)-\left(y_j^k+\Delta y_j^k\right)=0\ ,$$
$$Z_j^{k-1}-Z_j^k=\left(z_j^{k-1}+\Delta z_j^{k-1}\right)-\left(z_j^k+\Delta z_j^k\right)=0\ .$$

Din aceste egalităţi rezultă ecuaţiile de corecţii:

$$P_{x_j}^{k-1}-P_{x_j}^k-\Delta x_j^{k-1,k}=v_{x_j}^{k-1,k}\ ,$$
$$P_{y_j}^{k-1}-P_{y_j}^k-\Delta y_j^{k-1,k}=v_{y_j}^{k-1,k}\ , \qquad (6.20)$$
$$P_{z_j}^{k-1}-P_{z_j}^k-\Delta z_j^{k-1,k}=v_{z_j}^{k-1,k}\ .$$

ale căror termeni liberi sunt discordanţele relative, având expresiile:

$$\Delta x_j^{k-1,k}=x_j^k-x_j^{k-1}\ ,$$
$$\Delta y_j^{k-1,k}=y_j^k-y_j^{k-1}$$
$$\Delta z_j^{k-1,k}=z_j^k-z_j^{k-1}$$

Referitor la corecţiile din membrul drept al ecuaţiilor (6.20), având în vedere cele precizate în paragraful 6.2.4 şi relaţiile (4.72), acestea vor avea următoarele semnificaţii:

$$v_{x_j}^{k-1,k}=\overline{v}_{x_j}^{k-1}-\overline{v}_{x_j}^k=v_{x_j}^k-v_{X_j}-v_{x_j}^{k-1}+v_{X_j}=v_{x_j}^k-v_{x_j}^{k-1}\ ,$$
$$v_{y_j}^{k-1,k}=\overline{v}_{y_j}^{k-1}-\overline{v}_{y_j}^k=v_{y_j}^k-v_{Y_j}-v_{y_j}^{k-1}+v_{Y_j}=v_{y_j}^k-v_{y_j}^{k-1}\ ,$$
$$v_{z_j}^{k-1,k}=\overline{v}_{z_j}^{k-1}-\overline{v}_{z_j}^k=v_{z_j}^k-v_{Z_j}-v_{z_j}^{k-1}+v_{Z_j}=v_{z_j}^k-v_{z_j}^{k-1}\ .$$

Observând că valorile $x_j^{k-1},y_j^{k-1},z_j^{k-1}$; x_j^k,y_j^k,z_j^k şi corecţiile lor $v_{x_j}^{k-1},v_{y_j}^{k-1},v_{z_j}^{k-1}$; $v_{x_j}^k,v_{y_j}^k,v_{z_j}^k$ apar într-o singură ecuaţie (cea corespunzătoare punctului *j*), ecuaţiile se pot considera independente, iar parametrii (coeficienţii) necunoscuţi vor putea fi determinaţi prin metoda măsurătorilor indirecte (v.paragraful C.2.2). Principiul pătratelor minime va fi aplicat sistemului compus din ecuaţiile corespunzătoare tuturor punctelor de reper (de sprijin) şi tuturor punctelor de legătură din blocul respectiv, obţinându-se valorile cele mai probabile ale coeficienţilor polinoamelor fiecărei benzi.

Cu ajutorul acestora, se vor putea calcula corecţiile Δx, Δy, Δz corespunzătoare fiecărui punct din fiecare bandă pe baza formulelor polinomiale

Scanned with OKEN Scanner

utilizate la compensare şi se vor putea obţine coordonatele compensate cu formulele (6.14). Datorită condiţiei puse punctelor de legătură, coordonatele compensate ale acestora rezultate din cele două benzi alăturate vor trebui să fie egale. Totuşi, între ele rămânând mici diferenţe, acestea vor trebui mediate.

6.3.2. COMPENSAREA ÎN BLOC CU MODELE INDEPENDENTE

Unităţile de compensare vor fi în acest caz modelele stereoscopice (simple sau duble) independente, obţinute pe cale analogică (la un aparat de stereorestituţie) sau pe cale analitică (prin calcul). Coordonatele punctelor sunt raportate la sistemul propriu fiecărui stereomodel. Un astfel de sistem are o origine arbitrară şi o orientare arbitrară în spaţiu. În plus, fiecare model are o scară arbitrară.

Problema care se pune constă în transformarea simultană a tuturor modelelor care alcătuiesc blocul în sistemul de coordonate-teren pe baza **punctelor de sprijin** (dispuse în anumite poziţii, după cum se va vedea ulterior) şi pe baza **punctelor de legătură** (longitudinală şi transversală) dintre modele. După cum s-a arătat în paragraful 6.2.3, pentru o bună conexiune longitudinală (în cazul modelelor simple) vor trebui considerate ca puncte de legătură şi **centrele de proiecţie**.

Pe de altă parte, s-a menţionat că pot fi folosite ca unităţi de compensare şi modele stereoscopice duble, obţinute pe baza a 3 fotograme succesive (fig.4.4). Deoarece aceste stereomodele au acoperiri longitudinale de aproximativ 66% vor putea asigura o bună conexiune longitudinală, fără a mai fi necesară utilizarea centrelor de proiecţie ca puncte de legătură.

Se poate recurge însă şi la o soluţie intermediară implicând folosirea centrelor de proiecţie, dar reducând la jumătate numărul stereomodelelor (considerând doar modelele duble cu număr impar, sau cu număr par).

De asemenea, se poate remarca faptul că şi în cazul modelelor simple independente se pot omite centrele de proiecţie la conexiunea modelelor, dacă se dispune de puncte de reper pe întreg perimetrul blocului (fig.6.11). O explicaţie intuitivă ar fi următoarea: pornind de ex. de la modelul din stânga sus, se observă că acesta poate fi orientat absolut pe baza celor 3 puncte de sprijin; în consecinţă, se vor putea determina coordonatele-teren ale celui de-al patrulea punct; acesta, împreună cu cele două puncte de sprijin din modelul următor vor permite orientarea absolută a modelului al doilea ş.a.m.d. Acelaşi raţionament se poate face pornind de la oricare din colţurile blocului, explicând principiul compensării în cazul prezentat în figura 6.11. Totuşi, compensarea se execută simultan pentru toate modelele, consideraţiile anterioare având doar un rol demonstrativ.

Scanned with OKEN Scanner

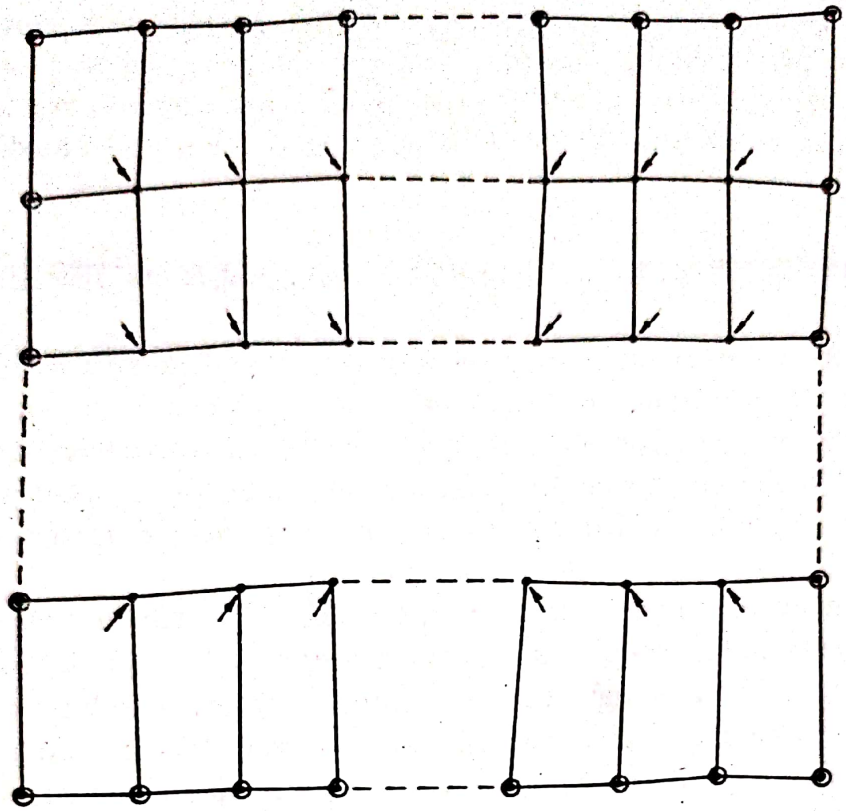

Figura 6.11. Bloc cu modele independente având puncte de sprijin pe întreg perimetrul.

Din punct de vedere matematic, problema se rezolvă cu ajutorul formulelor transformării conforme tridimensionale (A.37) ai căror parametri, proprii fiecărui model k, se determină în bloc pe baza punctelor de sprijin şi a punctelor de legătură dintre modele:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{pmatrix}^k + m^k R^k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^k . \qquad (6.21)$$

a. Determinarea simultană a parametrilor transformării conforme spaţiale

Având în vedere că relaţiile (A.37), respectiv (6.21), nu sunt liniare în raport cu parametrii necunoscuţi, pentru obţinerea acestora va trebui utilizată forma liniarizată a transformării conforme tridimensionale (A.45), particularizată pentru un model oarecare k :

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 & z & -y \\ 0 & 1 & 0 & y & -z & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & z & y & -x & 0 \end{pmatrix}^k \dot{\Delta}^k + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^k - \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \end{pmatrix}^k , \quad (6.22)$$

unde

$$(\dot{\Delta}^k)^T = (dX_o, dY_o, dZ_o, dm, d\Omega, d\Phi, d\mathrm{K})^k \ ,$$

iar $\bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{v}_z$ ale căror expresii sunt date de relaţiile (4.72) vor avea forma particulară $\bar{v}_x = -v_x$, $\bar{v}_y = -v_y$, $\bar{v}_z = -v_z$, având în vedere că aici $v_X = v_Y = v_Z = 0$, X, Y, Z nemaifiind mărimi măsurate, ci necunoscute.

Cu aceste observaţii, ecuaţiile (6.22) vor putea fi scrise sub forma:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -x & 0 & -z & y \\ 0 & -1 & 0 & -y & z & 0 & -x \\ 0 & 0 & -1 & -z & -y & x & 0 \end{pmatrix}^k \dot{\Delta}^k + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}^k .$$

Pentru fiecare punct măsurat în modelul k (indiferent dacă este punct de legătură sau punct de sprijin), se vor scrie câte 3 ecuaţii de corecţii de forma (6.22).

În plus, pentru fiecare punct de sprijin se mai pot scrie câte 3 ecuaţii având forma:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{pmatrix} , \quad (6.23)$$

unde X^m, Y^m, Z^m sunt valorile măsurate ale coordonatelor punctului de sprijin respectiv.

Deoarece relaţiile (6.22) sunt obţinute prin liniarizare şi deci au un anumit grad de aproximare, procesul de calcul va fi iterativ, necesitând cunoaşterea unor valori iniţiale pentru parametrii de transformare ai fiecărui model. Un mod de a determina aceste valori aproximative iniţiale este similar compensării propriu-zise, având însă la bază formulele transformării conforme în plan (A.5):

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & -y \\ 0 & 1 & y & x \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} a_o \\ b_o \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}^k \quad (6.24)$$

ai cărei parametri au semnificaţiile (A.3), adică

$$a_o = X_o,\ b_o = Y_o,\ a_1 = m\cos K,\ b_1 = m\sin K.$$

Această transformare are avantajul de a fi liniară şi, prin tratarea în bloc a tuturor modelelor (după cum se va arăta mai detaliat în paragraful următor), se vor putea obţine valorile iniţiale $(X_o^o, Y_o^o, m^o, K^o)^k$ pentru fiecare stereomodel. Gradul de aproximare al acestor valori depinde de înclinările modelelor, care au fost neglijate. Adică, presupunând fotogramele nadirale s-au considerat aproximaţiile iniţiale $\Omega^o = \Phi^o = 0$ pentru toate modelele. În ceea ce priveşte valoarea aproximativă a celui de-al şaptelea parametru (Z_o), aceasta se poate calcula cu relaţia:

$$Z_o^o = m^o f + Z_m \quad , \tag{6.25}$$

unde Z_m este cota medie a terenului (din zona blocului). Z_o^o se poate lua ca valoare iniţială pentru toate modelele din bloc.

O altă modalitate de a determina valori aproximative pentru parametrii de transformare ai modelelor ce alcătuiesc blocul constă în formarea benzilor de aerotriangulaţie. Aceasta va permite totodată detectarea şi eliminarea erorilor mari, ceea ce va reprezenta un avantaj deosebit având în vedere că în bloc erorile sunt mult mai greu de localizat.

Cu ajutorul valorilor aproximative (obţinute într-un mod sau altul) se face o primă transformare a coordonatelor-model cu relaţii de forma (6.21), cu observaţia că valorile obţinute în membrul stâng se vor nota tot cu x,y,z.

În ceea ce priveşte procesul iterativ, pentru a exemplifica formarea ecuaţiilor de corecţii, se va considera un foarte mic bloc alcătuit din 4 modele (fig.6.12).

Numărul total de necunoscute se poate calcula cu formula:

$$n_n = 7m + 3(n_l + n_r) \quad ,$$

unde m este numărul modelelor, n_l este numărul punctelor de legătură, având coordonate necunoscute, iar n_r este numărul punctelor de reper ale căror coordonate se consideră de asemenea necunoscute. În cazul prezentat în figura 6.12, $m = 4$, $n_l = 7$ (considerând numărul minim necesar de puncte de conexiune şi presupunând punctul din mijlocul blocului (3), comun la cele 4 modele), iar $n_r = 4$. Prin urmare, $n_n = 28 + 33 = 61$.

În ceea ce priveşte numărul de ecuaţii de corecţii, acesta va rezulta din însumarea numărului ecuaţiilor de forma (6.22) şi anume câte 3 pentru fiecare punct (de legătură sau de sprijin) măsurat în fiecare model, cu numărul ecuaţiilor de forma (6.23) şi anume câte 3 pentru fiecare punct de reper măsurat în teren. Deci, în cazul prezentat în figura 6.12, deoarece în fiecare model se măsoară câte 4 puncte de legătură şi un punct de sprijin, vor rezulta $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ ecuaţii de forma (6.22), iar pentru cele 4 puncte de reper se vor putea scrie $3 \cdot 4 = 12$ ecuaţii de forma (6.23). În consecinţă, vor rezulta 72 de ecuaţii cu 61 de necunoscute,

Scanned with OKEN Scanner

redundanţa (numărul de ecuaţii suplimentare) fiind $r = n_c - n_n = 72 - 61 = 11$. Desigur, numărul de ecuaţii ar putea fi mărit prin considerarea unui număr suplimentar de puncte de legătură. În ceea ce priveşte celelalte puncte, ce nu sunt comune la cel puţin două modele şi deci nu pot fi folosite ca puncte de legătură, ele vor fi transformate la sfârşit, neinfluenţând compensarea.

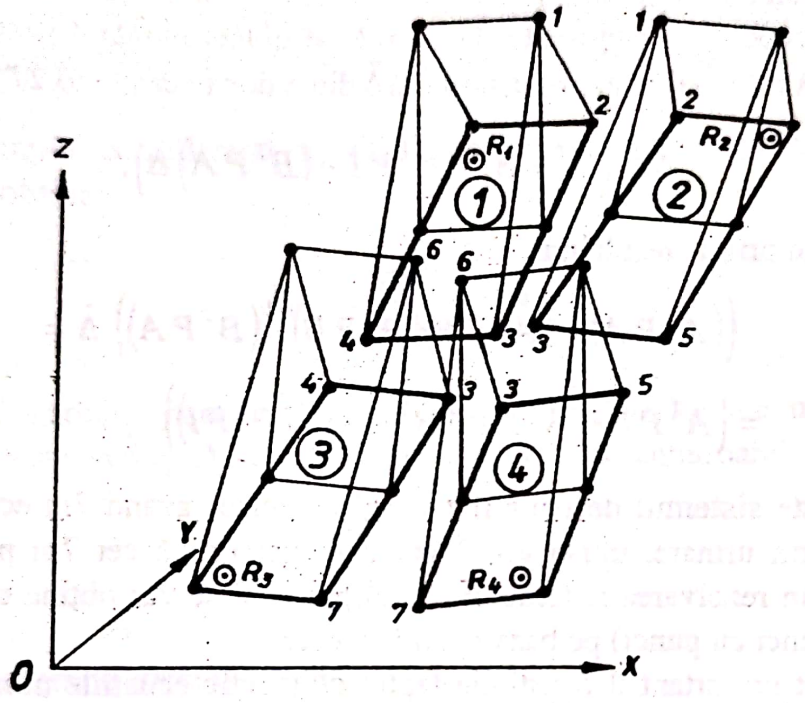

Figura 6.12. Formarea unui mic bloc cu modele independente.

Referitor la exemplul prezentat, se poate constata că dacă în cazul unui bloc foarte mic, numărul ecuaţiilor şi numărul necunoscutelor sunt atât de mari, în cazul blocurilor cu un număr mai mare de modele (zeci sau chiar sute de modele), care se întâlnesc de obicei în practică, dimensiunile sistemelor de ecuaţii corespunzătoare ar crea serioase probleme, dacă nu s-ar avea în vedere anumite soluţii simplificatoare.

Sistemul ce conţine toate ecuaţiile de forma (6.22) şi de forma (6.23) se poate reprezenta în notaţie matriceală astfel:

$$A\dot{\Delta} + B\ddot{\Delta} - l = V \qquad (6.26)$$

unde $\dot{\Delta}$ este vectorul parametrilor de transformare ai tuturor modelelor, $\ddot{\Delta}$ este vectorul coordonatelor necunoscute, A şi B sunt matricele coeficienţilor corespunzători, l reprezintă vectorul termenilor liberi, iar V este vectorul corecţiilor măsurătorilor.

Aplicând principiul pătratelor minime, rezultă următorul sistem de ecuaţii normale:

$$\begin{cases} \left(A^T P A\right)\dot{\Delta} + \left(A^T P B\right)\ddot{\Delta} = A^T P l \\ \left(B^T P A\right)\dot{\Delta} + \left(B^T P B\right)\ddot{\Delta} = B^T P l \end{cases}, \tag{6.27}$$

unde P este matricea ponderilor măsurătorilor.

O importantă simplificare a calculelor se poate obţine dacă se elimină una din cele două grupe de necunoscute. Deoarece de obicei numărul necunoscutelor din a doua grupă este mai mare, se determină $\ddot{\Delta}$ din a doua ecuaţie (6.27):

$$\ddot{\Delta} = \left(B^T P B\right)^{-1}\left(B^T P l - \left(B^T P A\right)\dot{\Delta}\right), \tag{6.28}$$

şi se substituie în prima, rezultând:

$$\begin{aligned} &\left(\left(A^T P A\right) - \left(A^T P B\right)\left(B^T P B\right)^{-1}\left(B^T P A\right)\right)\dot{\Delta} = \\ &= \left(A^T P l - \left(A^T P B\right)\left(B^T P B\right)^{-1}\left(B^T P l\right)\right) . \end{aligned} \tag{6.29}$$

Acesta este **sistemul de ecuaţii normale reduse** având $7m$ ecuaţii cu $7m$ necunoscute. Prin urmare, într-o primă etapă se determină cei $7m$ parametri de transformare prin rezolvarea sistemului (6.29), iar apoi se vor obţine coordonatele necunoscute (punct cu punct) pe baza relaţiilor (6.28).

Un aspect important îl constituie faptul că practic ecuaţiile normale reduse se pot genera direct, fără a mai forma ecuaţiile de corecţii. Rezolvarea acestui sistem este recomandabil să se facă printr-una din cele două metode prezentate în paragraful B.3.3.c, utilizând submatrice.

Având în vedere structura de tip bandă a matricei coeficienţilor, trebuie remarcat că lăţimea acestei benzi depinde de modul de numerotare a modelelor. Astfel, în cazul frecvent în care numărul benzilor ce formează blocul este mult mai mic decât numărul stereomodelelor dintr-o bandă, este mai avantajoasă numerotarea transversală (după cum se va putea constata dintr-un exemplu ce va fi prezentat în paragraful următor).

Pe de altă parte, trebuie precizat că o prelucrare riguroasă prin metoda pătratelor minime trebuie să ţină seama de ponderile coordonatelor utilizate la compensare. În general, coordonatele fotogrammetrice se pot considera de ponderi egale, cu excepţia coordonatelor planimetrice (x,y) ale centrelor de proiecţie obţinute la un aparat analogic de stereorestituţie, a căror eroare medie pătratică este dublă (în raport cu cea a celorlalte coordonate-model). În schimb, coordonatele punctelor de sprijin determinate în teren pot avea ponderi foarte diferite, fiind obţinute cu precizii diferite atât unele în raport cu altele, cât şi în raport cu cele obţinute pe cale fotogrammetrică.

Scanned with OKEN Scanner

Considerând ponderea coordonatelor-model egală cu 1, ponderea unui punct planimetric de sprijin se poate calcula cu relaţia:

$$P_{XY} = \frac{\sigma_f^2}{\sigma_{XY}^2} \ ,$$

unde σ_f este eroarea medie pătratică a măsurătorilor fotogrammetrice, iar σ_{XY} este eroarea medie pătratică de determinare a coordonatelor plane ale unui punct de sprijin.

De exemplu, considerând $\sigma_f = 0{,}01$ mm, $\sigma_{XY} = 0{,}05$m şi scara modelului 1: 10.000, se obţine

$$P_{XY} = \frac{(0{,}1)^2}{(0{,}05)^2} = 4 \ .$$

În mod similar, ponderea coordonatelor planimetrice ale unui centru de proiecţie (obţinute analogic) va fi (conform observaţiilor anterioare):

$$P_{xy} = \frac{(0{,}01)^2}{(0{,}02)^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \ ,$$

aici nemaiintervenind scara modelului.

De toate aceste ponderi va trebui să se ţină seama la calculul coordonatelor-teren definitive ale punctelor.

O altă metodă presupune eliminarea de la început a coordonatelor necunoscute. Astfel, pentru punctele de reper, prin combinarea relaţiilor (6.22) şi (6.23) rezultă ecuaţii de corecţii similare celor de la orientarea absolută (4.73):

$$\begin{cases} dX_o^k + x_i^k dm^k + z_i^k d\Phi^k - y_i^k d\mathrm{K}^k + x_i^k - X_i^m = \overline{v}_{x_i}^k \\ dY_o^k + y_i^k dm^k - z_i^k d\Omega^k + x_i^k d\mathrm{K}^k + y_i^k - Y_i^m = \overline{v}_{y_i}^k \\ dZ_o^k + z_i^k dm^k + y_i^k d\Omega^k - x_i^k d\Phi^k + z_i^k - Z_i^m = \overline{v}_{z_i}^k \end{cases} \quad (6.30)$$

unde indicele k specifică modelul, termenii liberi X_i^m, Y_i^m, Z_i^m reprezintă coordonatele-teren măsurate ale punctului de sprijin i, iar corecţiile $\overline{v}_{x_i}, \overline{v}_{y_i}, \overline{v}_{z_i}$ au expresiile (4.72).

Pentru punctele de legătură se pune condiţia ca valorile coordonatelor compensate obţinute din cele două modele vecine să fie egale. Prin urmare, pentru fiecare punct de legătură j comun modelelor k şi l, se pot scrie câte 3 ecuaţii

Scanned with OKEN Scanner

rezultate prin scăderea egalităţilor (6.22) particularizate pentru modelele vecine *k* şi *l*:

$$\begin{aligned} &dX_o^k + x_j^k dm^k + z_j^k d\Phi^k - y_j^k d\mathrm{K}^k - dX_o^l - x_j^l dm^l - z_j^l d\Phi^l + y_j^l d\mathrm{K}^l + \\ &\qquad + \left(x_j^k - x_j^l\right) = v_{x_j}^l - v_{x_j}^k \\ &dY_o^k + y_j^k dm^k - z_j^k d\Omega^k + x_j^k d\mathrm{K}^k - dY_o^l - y_j^l dm^l + z_j^l d\Omega^l - x_j^l d\mathrm{K}^l + \\ &\qquad + \left(y_j^k - y_j^l\right) = v_{y_j}^l - v_{y_j}^k \\ &dZ_o^k + z_j^k dm^k + y_j^k d\Omega^k - x_j^k d\Phi^k - dZ_o^l - z_j^l dm^l - y_j^l d\Omega^l + x_j^l d\Phi^l + \\ &\qquad + \left(z_j^k - z_j^l\right) = v_{z_j}^l - v_{z_j}^k \end{aligned} \tag{6.31}$$

Prin aceste scăderi, coordonatele-teren necunoscute X_j, Y_j, Z_j au fost eliminate, dar în membrul drept apar diferenţe de corecţii. Acelasi punct *j* poate fi comun însă mai multor modele, ca de exemplu punctul 3 din figura 6.12. Astfel, prin procedeul descris s-ar putea scrie 6 grupe de ecuaţii de forma (6.31), considerând că punctul 3 leagă modelele 1 cu 2, 1 cu 3, 2 cu 4, 3 cu 4, 1 cu 4 şi 2 cu 3 (fig.6.13). Totuşi, dintre aceste legături numai 3 sunt independente.

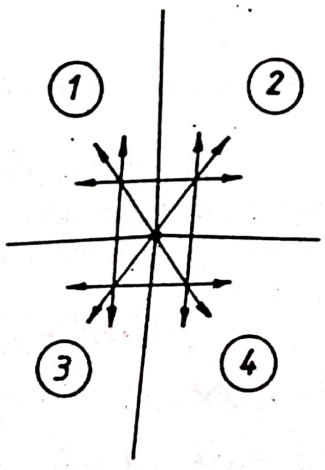

Figura 6.13. Legăturile stabilite de un punct comun la patru modele.

Din aceste consideraţii rezultă că mărimile $v_{x_j}^k, v_{y_j}^k, v_{z_j}^k$ pot să apară în mai multe ecuaţii, care nu vor mai fi deci independente, ci corelate.

Sistemul ce conţine toate ecuaţiile de forma (6.30) şi de forma (6.31) se poate reprezenta în notaţie matriceală astfel:

$$\overline{A}\,\dot{\Delta} + \overline{l} = \overline{V}\ , \tag{6.32}$$

Scanned with OKEN Scanner

semnificațiile elementelor componente fiind evidente.

Între vectorul $\overline{V}$ conținând diferențe de corecții și vectorul V format din corecțiile individuale ale punctelor măsurate se poate scrie (după cum se arată în [11]) relația:

$$\overline{V} = FV \quad , \tag{6.33}$$

matricea F conținând 1 și -1 pe pozițiile corespunzătoare, celelalte elemente fiind nule.

Principiul pătratelor minime va deveni în acest caz:

$$\overline{V}^{\mathrm{T}} Q_{\overline{V}}^{-1} \overline{V} = \text{minim} \quad , \tag{6.34}$$

unde

$$Q_{\overline{V}} = F P^{-1} F^{\mathrm{T}} \quad ,$$

P fiind matricea ponderilor.

Sistemul de ecuații normale va fi:

$$\left(\overline{A}^{\mathrm{T}} Q_{\overline{V}}^{-1} \overline{A}\right) \dot{\Delta} + \overline{A}^{\mathrm{T}} Q_{\overline{V}}^{-1} \overline{l} = O$$

și va avea soluția:

$$\dot{\Delta} = -\left(\overline{A}^{\mathrm{T}} Q_{\overline{V}}^{-1} \overline{A}\right)^{-1} \left(\overline{A}^{\mathrm{T}} Q_{\overline{V}}^{-1} \overline{l}\right) \quad . \tag{6.35}$$

În ceea ce privește determinarea corecțiilor V, aceasta nu se va putea face direct din (6.33), deoarece în general matricea F este dreptunghiulară. De aceea, pentru calculul corecțiilor individuale conținute în vectorul V se va folosi relația:

$$V = \left(F^{\mathrm{T}} F\right)^{+} F^{\mathrm{T}} \overline{V} \quad , \tag{6.36}$$

unde cu indicele " $^{+}$ " s-a notat pseudoinversa (definită în paragraful B.1.3).

b. Determinarea separată a parametrilor planimetrici și altimetrici

După cum s-a arătat în paragraful anterior, în cazul blocurilor mari, numărul total de necunoscute (având în vedere desigur reducerea acestora la parametrii de transformare) este totuși considerabil. O simplificare semnificativă a calculelor se poate obține însă prin compensarea separată a planimetriei și a altimetriei. Astfel, în locul determinării simultane a celor $7m$ parametri (m fiind numărul modelelor

din bloc) se vor determina în cadrul compensării planimetrice $4m$ parametri, iar în cadrul compensării altimetrice $3m$ parametri.

Compensarea planimetrică se realizează pe baza formulelor transformării conforme în plan (A.4) care, particularizate pentru un punct j din modelul k, vor fi:

$$\begin{cases} X_j = a_o^k + a_1^k x_j^k - b_1^k y_j^k \\ Y_j = b_o^k + b_1^k x_j^k + a_1^k y_j^k \end{cases}, \tag{6.37}$$

cei 4 parametri având semnificaţiile (A.3), adică

$$a_o^k = X_o^k \;,\; b_o^k = Y_o^k \;,\; a_1^k = m^k \cos K^k \;,\; b_1^k = m^k \sin K^k \;.$$

Aceste relaţii se pot scrie sub forma a două funcţii identic nule:

$$\begin{cases} F_1 \equiv a_o^k + a_1^k x_j^k - b_1^k y_j^k - X_j = 0 \\ F_2 \equiv b_o^k + b_1^k x_j^k + a_1^k y_j^k - Y_j = 0 \end{cases}. \tag{6.38}$$

Având în vedere că ele conţin atât mărimi măsurate (x_j^k, y_j^k), precum şi necunoscute ($a_o^k, b_o^k, a_1^k, b_1^k, X_j, Y_j$), tratarea prin metoda pătratelor minime ar trebui făcută conform cazului general (v.paragraful C.2.5), sistemul de ecuaţii fiind de forma (C.133):

$$AV + B\Delta - W = O \;,$$

sau, trecând corecţiile măsurătorilor în membrul drept,

$$B\Delta - W = -AV \;. \tag{6.39}$$

După cum rezultă din (6.38), matricea A_j^k şi vectorul corecţiilor V_j^k ce corespund unui punct j măsurat în modelul k vor fi:

$$A_j^k = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}^k \;,\; V_j^k = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}_j^k \;.$$

Având în vedere că funcţiile F_1 şi F_2 sunt liniare în raport cu necunoscutele, sistemul de ecuaţii (6.39) se va putea scrie sub forma:

$$\begin{cases} a_o^k + x_j^k a_1^k - y_j^k b_1^k - X_j = -a_1^k v_{x_j}^k + b_1^k v_{y_j}^k \\ b_o^k + y_j^k a_1^k + x_j^k b_1^k - Y_j = -b_1^k v_{x_j}^k - a_1^k v_{y_j}^k \end{cases}. \tag{6.40}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se poate observa, deci, că pentru a reduce cazul general la metoda măsurătorilor indirecte, va trebui ca valorile a_1^k şi b_1^k să poată fi aproximate cu 1 şi respectiv 0. Prin urmare, ţinând seama de semnificaţiile acestor parametri, va trebui ca în prealabil să se facă o transformare aproximativă a coordonatelor, pentru ca factorul de scară să devină aproape 1, iar rotaţia K să fie foarte mică.

Pentru determinarea valorilor aproximative ale parametrilor transformării se pot utiliza aceleaşi relaţii (A.4) care pentru un punct de reper *i* măsurat în modelul *k* vor genera ecuaţii de forma:

$$\begin{cases} a_o^k + x_i^k a_1^k - y_i^k b_1^k - X_i = 0 \\ b_o^k + y_i^k a_1^k + x_i^k b_1^k - Y_i = 0 \end{cases}, \tag{6.41}$$

iar pentru un punct de legătură *j* comun modelelor *k* şi *l*, ecuaţii de forma:

$$\begin{cases} a_o^k + x_j^k a_1^k - y_j^k b_1^k - a_o^l - x_j^l a_1^l + y_j^l b_1^l = 0 \\ b_o^k + y_j^k a_1^k + x_j^k b_1^k - b_o^l - y_j^l a_1^l - x_j^l b_1^l = 0 \end{cases}. \tag{6.42}$$

Coordonatele-teren ale punctelor de reper (X_i, Y_i) se consideră cunoscute, iar coordonatele necunoscute ale punctelor de legătură au fost eliminate. Urmând să se determine doar valori aproximative, în aceste relaţii nu s-au luat în considerare erorile mărimilor măsurate. Astfel, sistemul care se va întocmi va trebui să aibă tot atâtea ecuaţii câte necunoscute implică cele *m* modele şi anume $4m$. Aceste ecuaţii vor trebui să corespundă cerinţelor geometrice privind conexiunea modelelor în bloc şi transformarea acestuia în sistemul de coordonate-teren.

Pentru exemplificare se consideră un mic bloc alcătuit din două benzi a câte 3 modele (fig.6.14). Numărul parametrilor necunoscuţi va deci $4m = 24$. Numărul strict necesar de puncte de reper fiind $n_r = 2$, se vor scrie $2 \cdot 2 = 4$ ecuaţii de forma (6.41). Pe de altă parte, legăturile strict necesare alcătuirii blocului planimetric fiind cele reprezentate în figura 6.14, se vor scrie $2 \cdot 10 = 20$ ecuaţii de forma (6.42). Va rezulta deci un sistem de 24 de ecuaţii cu 24 de necunoscute, care poate fi rezolvat algebric, obţinându-se valorile aproximative ale celor $4m$ parametri.

Prin urmare, pentru fiecare model se vor cunoaşte acum translaţiile aproximative X_o^k, Y_o^k, factorul de scară aproximativ $m^k = \sqrt{\left(a_1^k\right)^2 + \left(b_1^k\right)^2}$ şi valoarea aproximativă a rotaţiei K^k $(\sin K^k = b_1^k / m^k, \cos K^k = a_1^k / m^k)$. Presupunând înclinările mici şi aproximându-le cu zero ($\Omega^k = \Phi^k = 0$) şi considerând pentru Z_o^k valoarea aproximativă dată de relaţia (6.25), se va putea aplica tuturor punctelor din fiecare model *k* transformarea (6.21), cu observaţia că valorile obţinute în membrul stâng se vor nota tot cu *x,y,z*.

Scanned with OKEN Scanner

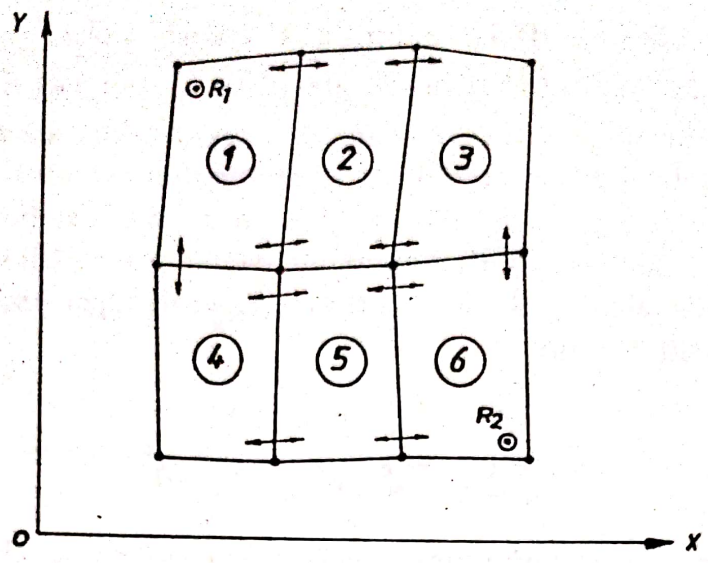

Figura 6.14. Legăturile strict necesare unui bloc planimetric cu 6 modele.

Cu aceste valori, se va putea trece acum la faza de compensare utilizând metoda măsurătorilor indirecte. Astfel, în cadrul **compensării planimetrice**, pentru fiecare punct măsurat în modelul k (indiferent dacă este punct de legătură sau punct de sprijin), se vor scrie pe baza relaţiilor (6.40) câte două ecuaţii de corecţii de forma:

$$\begin{cases} -a_o^k - x^k a_1^k + y^k b_1^k + X = v_x^k \\ -b_o^k - y^k a_1^k - x^k b_1^k + Y = v_y^k \end{cases}, \tag{6.43}$$

coordonatele-teren X, Y fiind considerate (pentru toate punctele) necunoscute.

În plus, pentru fiecare punct de sprijin se mai pot scrie câte două ecuaţii de corecţii de forma:

$$\begin{cases} X - X^m = v_X \\ Y - Y^m = v_Y \end{cases}, \tag{6.44}$$

unde cu X^m, Y^m s-au notat coordonatele-teren măsurate, v_X şi v_Y fiind corecţiile acestora.

Ca şi în paragraful precedent, sistemul alcătuit din toate ecuaţiile de forma (6.43) şi de forma (6.44) se poate reprezenta prin relaţia matriceală (6.26) şi conduce (prin aplicarea principiului pătratelor minime) la sistemul de ecuaţii normale (6.27). De aici, se poate obţine sistemul de ecuaţii normale reduse (6.29) având $4m$ ecuaţii cu $4m$ necunoscute. După determinarea celor $4m$ parametri se vor obţine coordonatele necunoscute (punct cu punct) şi care vor fi utilizate în etapa următoare şi anume la compensarea altimetrică.

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, trebuie precizat că la compensarea planimetrică nu se utilizează centrele de proiecţie, conexiunea planimetrică putându-se realiza pe baza punctelor comune din stereomodelele vecine. Dacă în plus, coordonatele punctelor măsurate în fiecare model (ce intervin la compensarea planimetrică) sunt reduse la centrul lor de greutate, pe baza proprietăţii ce o au coordonatele reduse şi anume $\left[\bar{x}^k\right]=\left[\bar{y}^k\right]=0$, matricea $A^T P A$ va deveni o matrice diagonală, de forma:

$$\begin{pmatrix} n^1 & & & & & & & \\ & n^1 & & & & & & \\ & & \Sigma^1 & & & & & \\ & & & \Sigma^1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & n^m & & \\ & & & & & & n^m & \\ & & & & & & & \Sigma^m \\ & & & & & & & & \Sigma^m \end{pmatrix}$$

unde n^k este numărul total al punctelor (de reper şi de legătură) din modelul k utilizate la compensare, iar $\Sigma^k=\left[\left(\bar{x}^k\right)^2+\left(\bar{y}^k\right)^2\right]$, adică suma pătratelor coordonatelor aceloraşi puncte.

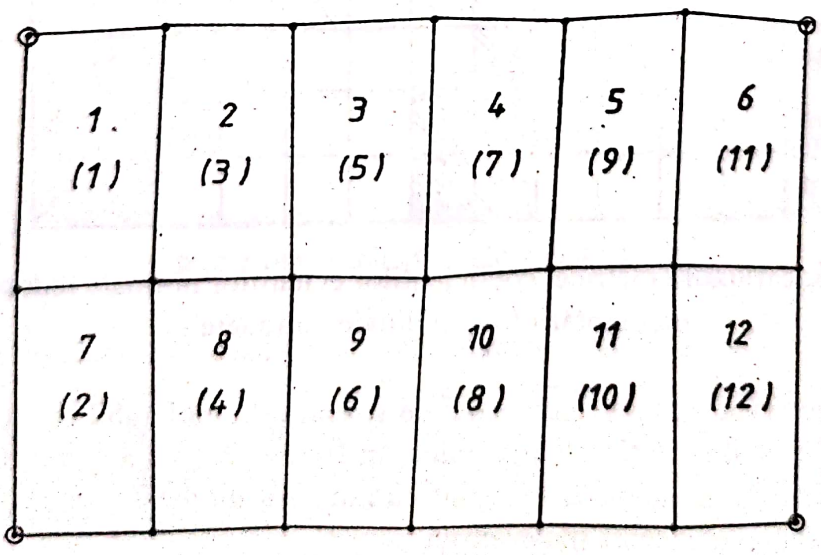

Figura 6.15. Bloc format cu 12 modele independente, numerotate longitudinal şi transversal.

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, matricea $B^T P B$ va fi tot o matrice diagonală, ale cărei elemente n_{X_j}, n_{Y_j} reprezintă numărul ecuaţiilor în X şi respectiv în Y ce se scriu pentru punctul j. O astfel de matrice se poate inversa direct, acest lucru simplificând obţinerea sistemului de ecuaţii normale reduse (6.29), unde apare $(B^T P B)^{-1}$ atât la formarea matricei coeficienţilor, cât şi a termenului liber.

Pentru o rezolvare eficientă a sistemului de ecuaţii normale reduse, va trebui să se ţină seama de structura de tip bandă a matricei coeficienţilor (fig.6.16 şi 6.17). Pentru exemplificare, s-a considerat un bloc format din două benzi cu câte 6 modele (fig.6.15) având o dispunere regulată.

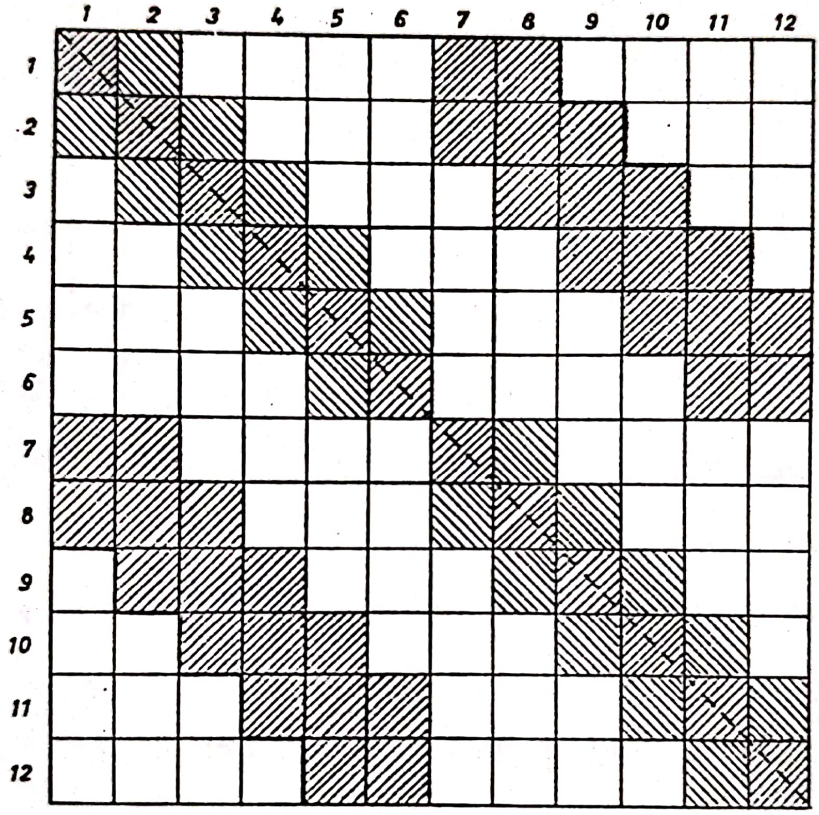

Figura 6.16. Structura matricei coeficienţilor ecuaţiilor normale reduse în cazul numerotării longitudinale a modelelor.

Deoarece la rezolvarea unui astfel de sistem este preferabil ca lăţimea benzii matricei coeficienţilor să fie cât mai mică, în figura 6.17 s-a arătat că pentru un bloc cu un număr mic de benzi în raport cu numărul modelelor dintr-o bandă este mai avantajoasă numerotarea transversală.

Referitor la matricea coeficienţilor ecuaţiilor normale reduse mai trebuie precizat că fiecare submatrice este de dimensiuni 4 × 4 (în cazul compensării planimetrice), iar modul în care sunt alcătuite aceste submatrice permite o uşoară generare a acestora (din datele iniţiale). Astfel, cele 12 submatrice (simetrice) de

Scanned with OKEN Scanner

pe diagonala principală corespund celor 12 modele, iar elementele lor se obţin prin aceleaşi formule care se programează o singură dată (pentru elementele unei singure submatrice), particularizându-se apoi pentru datele concrete privind fiecare model. Apoi, dacă se are în vedere figura 6.16, se poate remarca faptul că cele două şiruri de submatrice alăturate diagonalei principale se referă la legăturile longitudinale ale modelelor şi sunt alcătuite pe baza punctelor care asigură aceste legături. În fine, şirurile marginale de submatrice nenule (haşurate) semnifică legăturile transversale şi conţin elemente referitoare la aceste legături.

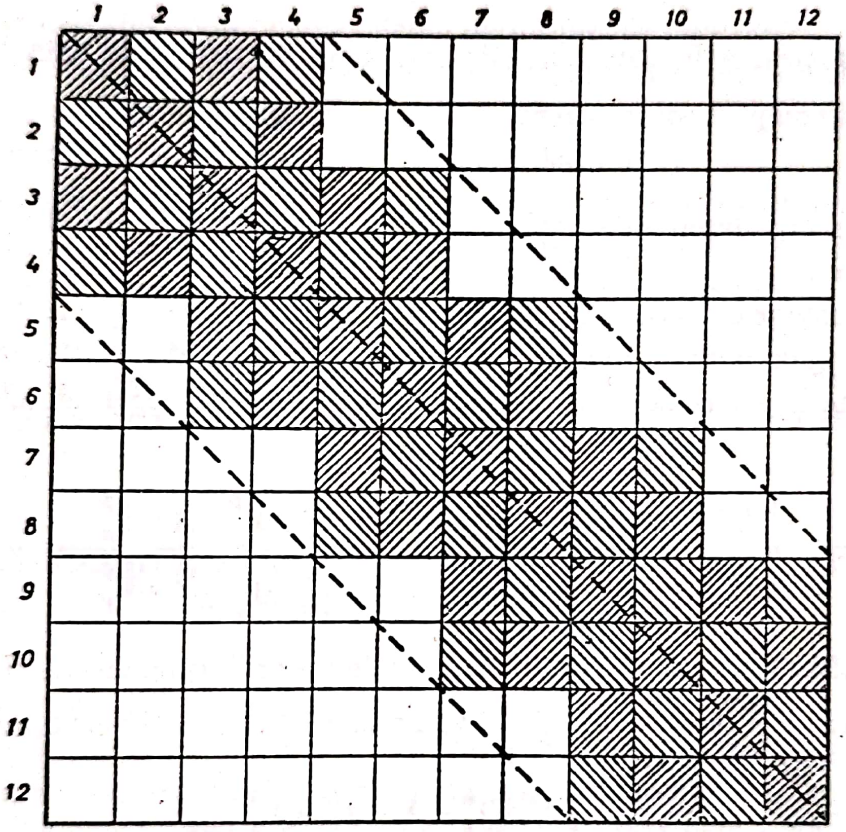

Figura 6.17. Structura matricei coeficienţilor ecuaţiilor normale reduse în cazul numerotării transversale a modelelor.

Este evident că rezolvarea unui sistem având o astfel de matrice a coeficienţilor este preferabil să se facă printr-o metodă ce operează cu submatrice, ca de exemplu una din metodele prezentate în paragraful B.3.3.c.

Un exemplu dezvoltat de compensare planimetrică a unui bloc cu modele independente este prezentat în [16].

În ceea ce priveşte **compensarea altimetrică**, aceasta se realizează pe baza unei relaţii derivate din cea de-a treia ecuaţie a sistemului (6.22) reprezentând forma liniarizată a transformării conforme spaţiale:

Scanned with OKEN Scanner

$$dZ_o^k + z^k dm^k + y^k d\Omega^k - x^k d\Phi^k + z^k - Z = \bar{v}_z^k \quad .$$

Având în vedere faptul că factorul de scară este propriu compensării planimetrice şi că $\bar{v}_z^k = -v_z^k$ deoarece $v_Z = 0$, Z fiind necunoscută în acest caz, rezultă următoarea ecuaţie de corecţii:

$$-dZ_o^k - y^k d\Omega^k + x^k d\Phi^k + Z - z^k = v_z^k \qquad (6.45)$$

care se va scrie pentru fiecare punct (de reper sau de legătură) măsurat în modelul k.

În plus, pentru fiecare punct de sprijin se va mai scrie câte o ecuaţie de forma:

$$Z - Z^m = v_Z \quad , \qquad (6.46)$$

unde Z^m este cota-teren măsurată a punctului de sprijin respectiv, iar v_Z este corecţia acesteia.

De asemenea, deoarece centrele de proiecţie nu au fost utilizate la compensarea planimetrică, pentru aceste puncte în afară de ecuaţia (6.45), se vor mai scrie câte două ecuaţii ce derivă din primele două egalităţi ale sistemului (6.22):

$$\begin{cases} dX_o^k + x^k dm^k + z^k d\Phi^k - y^k d\mathrm{K}^k + x^k - X = \bar{v}_x^k \\ dY_o^k + y^k dm^k - z^k d\Omega^k + x^k d\mathrm{K}^k + y^k - Y = \bar{v}_y^k \end{cases}$$

Eliminând termenii ce conţin elementele proprii compensării planimetrice şi având în vedere că $\bar{v}_x^k = -v_x^k$ şi $\bar{v}_y^k = -v_y^k$, rezultă următoarele ecuaţii de corecţii:

$$-z^k d\Phi^k + X - x^k = v_x^k \quad , \qquad (6.47)$$

$$z^k d\Omega^k + Y - y^k = v_y^k \quad . \qquad (6.48)$$

Trebuie subliniat că x^k, y^k şi z^k sunt coordonatele fotogrammetrice transformate în urma compensării planimetrice, iar X, Y şi Z sunt coordonatele-teren necunoscute ale punctelor.

Ca şi în cazul anterior, ecuaţiile normale reduse (la cei $3m$ parametri de transformare: $dZ_o^k, d\Omega^k, d\Phi^k$, $k = \overline{1,m}$) pot fi generate direct şi rezolvate matriceal.

Cu ajutorul parametrilor obţinuţi, se vor calcula noi valori ale coordonatelor fotogrammetrice ale tuturor punctelor utilizate în compensare.

Deoarece la compensarea altimetrică s-au folosit relaţii liniarizate (deci aproximative), iar la compensarea planimetrică nu s-a ţinut seama de influenţa

Scanned with OKEN Scanner

înclinărilor stereomodelelor asupra poziţiilor planimetrice ale punctelor, va rezulta necesitatea unui proces iterativ combinat: planimetrie-altimetrie. Oprirea iteraţiilor se poate realiza când se constată că valorile coordonatelor transformate nu se mai modifică sensibil, adică diferenţele faţă de valorile anterioare sunt mai mici de 0,001 mm (de ex.) la scara fotogramei. De obicei, în practică sunt suficiente două iteraţii planimetrie-altimetrie.

Desigur, pentru o prelucrare riguroasă prin metoda pătratelor minime trebuie să se ţină seama de ponderile coordonatelor utilizate la compensare, în acelaşi mod cum se arată în paragraful precedent. De asemenea, de aceste ponderi va trebui să se ţină seama la calculul coordonatelor-teren definitive ale punctelor.

În ceea ce priveşte a doua metodă de rezolvare a compensării cu modele independente prezentată în paragraful anterior, aceasta poate fi aplicată şi aici, dar cu aceleaşi precauţii privind tratarea corectă a corelaţiilor.

În sfârşit, trebuie precizat că oricare din metodele de compensare cu modele independente prezentate poate fi aplicată şi unei singure benzi, constituind un caz particular de bloc. Totuşi, se poate remarca modul diferit de rezolvare a problemei prin compensare simultană a tuturor modelelor, spre deosebire de tratarea prezentată în paragraful 6.2, implicând formarea benzii prin conexiunea modelelor succesive, urmată de compensarea (prin formule polinomiale) a acesteia.

6.3.3. COMPENSAREA ÎN BLOC CU FASCICULE FOTOGRAMMETRICE

Acesta este cel mai general şi mai riguros mod de compensare. Unitatea de calcul o constituie în acest caz fasciculul fotogrammetric corespunzător fiecărei fotograme, definit cu ajutorul coordonatelor măsurate ale punctelor fotogramei şi al elementelor de orientare interioară (f,x_p,y_p). Astfel, fiecare rază j din fasciculul k este determinată prin coordonatele-imagine reduse la punctul principal şi distanţa principală $(x,y,-f)_j^k$, după cum se arată în paragraful 2.1. De asemenea, raza mai poate fi definită prin parametrii directori $(u,v,1)_j^k$ daţi de relaţiile (3.34).

Avantajul principal pe care-l oferă această metodă constă în aceea că operează cu date primare obţinute la un comparator, spre deosebire de metodele prezentate anterior în care unităţile de compensare sunt afectate deja de erori. Astfel, la compensarea cu modele independente, fiecare stereomodel este deformat datorită (în principal) erorilor orientării relative, după cum s-a arătat în paragraful 4.2.3. De asemenea, benzile de aerotriangulaţie reprezentând unităţi de calcul la compensarea în bloc cu benzi sunt serios afectate de erorile pe care le implică legarea succesivă a modelelor. În consecinţă, aplicată corect, compensarea în bloc cu fascicule va asigura o precizie mai bună rezultatelor finale.

Scanned with OKEN Scanner

Modelul matematic are la bază ecuaţiile perspectivei centrale, adică ecuaţiile condiţiei de coliniaritate sub forma (3.8) sau sub forma (3.20). Aceste relaţii nefiind însă liniare în raport cu parametrii transformării, se va utiliza forma lor liniarizată (3.24), care va trebui însă completată cu termenii corespunzători coordonatelor-teren necunoscute. Observând că derivatele parţiale ale celor două funcţii (F_1 şi F_2 definite de (3.20)) în raport cu X,Y,Z vor avea aceleaşi expresii ca şi derivatele corespunzătoare în raport cu X_o,Y_o,Z_o dar cu semn schimbat, ecuaţiile (3.24) vor deveni:

$$\begin{cases} -\frac{f}{H^o}dX_o - \frac{x'}{H^o}dZ_o - \frac{x'y'}{f}d\omega + f\left(1+\frac{x'^2}{f^2}\right)d\varphi + y'd\kappa + \frac{f}{H^o}dX + \frac{x'}{H^o}dZ - \\ \qquad -\left(x'-x^o\right) = v_{x'} \\ -\frac{f}{H^o}dY_o - \frac{y'}{H^o}dZ_o - f\left(1+\frac{y'^2}{f^2}\right)d\omega + \frac{x'y'}{f}d\varphi - x'd\kappa + \frac{f}{H^o}dY + \frac{y'}{H^o}dZ - \\ \qquad -\left(y'-y^o\right) = v_{y'} \end{cases} \quad (6.49)$$

Evident, forma iterativă a ecuaţiilor de corecţii (3.27) va suferi aceleaşi modificări.

Se poate remarca de asemenea că Z nemaifiind considerat constant, nu mai poate fi utilizată notaţia $H = Z_o - Z$, ambii termeni din membrul drept reprezentând variabile. În consecinţă, faţă de relaţiile (3.24), în loc de dH va apare dZ_o, iar dZ va fi într-un termen distinct.

În cazul utilizării parametrilor directori (3.34), ecuaţiile (3.35), sau - sub forma omogenizată - (3.36) vor trebui completate şi modificate similar, ultimele (scrise neiterativ) devenind:

$$\begin{cases} dX'_o - udZ'_o + uvd\omega - \left(1+u^2\right)d\varphi + vd\kappa - dX' + udZ' - \left(u'-u^o\right) = v_{u'} \\ dY'_o - vdZ'_o + \left(1+v^2\right)d\omega - uvd\varphi - ud\kappa - dY' + vdZ' - \left(v'-v^o\right) = v_{v'} \end{cases}, \quad (6.50)$$

unde, dX',dY',dZ' reprezintă (ca şi dX'_o,dY'_o,dZ'_o) mărimile dX,dY,dZ împărţite cu H^o.

Separând corecţiile parametrilor de orientare exterioară ($\dot{\Delta}$) de corecţiile coordonatelor ($\ddot{\Delta}$),

$$\dot{\Delta}^T = (dX'_o,\ dY'_o,\ dZ'_o,\ d\omega,\ d\varphi,\ d\kappa)$$

$$\ddot{\Delta}^T = (dX',\ dY',\ dZ')$$

şi notând cu $\dot{B}$, respectiv $\ddot{B}$ matricele coeficienţilor corespunzători,

$$\dot{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -u & uv & -(1+u^2) & v \\ 0 & 1 & -v & 1+v^2 & -uv & -u \end{pmatrix},$$

$$\ddot{B}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & u \\ 0 & -1 & v \end{pmatrix},$$

iar cu l şi V termenii liberi şi respectiv corecţiile măsurătorilor

$$l=\begin{pmatrix} u'-u^o \\ v'-v^o \end{pmatrix},$$

$$V=\begin{pmatrix} v_{u'} \\ v_{v'} \end{pmatrix},$$

ecuaţiile (6.50) se vor putea scrie (pentru o rază j din fasciculul k) sub forma:

$$\dot{B}_j^k\,\dot{\Delta}^k+\ddot{B}_j^k\,\ddot{\Delta}_j-l_j^k=V_j^k\ . \qquad (6.51)$$

La aceeaşi formă pot fi aduse şi ecuaţiile (6.49) cu ajutorul unor notaţii similare.

În plus, pentru fiecare punct de reper i, pe baza egalităţilor

$$X_i=X_i^m+v_{X_i} \qquad X_i=X_i^o+dX_i$$
$$Y_i=Y_i^m+v_{Y_i} \quad \text{respectiv} \quad Y_i=Y_i^o+dY_i$$
$$Z_i=Z_i^m+v_{Z_i} \qquad Z_i=Z_i^o+dZ_i$$

unde cu indicele " ^{m} " s-au notat mărimile măsurate, iar cu indicele " ^{o}" valorile aproximative (ceilalţi termeni reprezentând corecţiile corespunzătoare), se pot scrie câte 3 ecuaţii de corecţii:

$$dX_i-\left(X_i^m-X_i^o\right)=v_{X_i}\ ,$$
$$dY_i-\left(Y_i^m-Y_i^o\right)=v_{Y_i}\ , \qquad (6.52)$$
$$dZ_i-\left(Z_i^m-Z_i^o\right)=v_{Z_i}\ .$$

Deoarece însă v_x, v_y sunt raportate la sistemul de coordonate-imagine, iar v_X, v_Y, v_Z la sistemul de coordonate-teren, ultimele vor trebui normalizate, înmulţind relaţiile (6.52) cu raportul f/H. Totuşi, în cazul formării ecuaţiilor (6.51)

Scanned with OKEN Scanner

pe baza relaţiilor (6.50), având în vedere că $v_{u'}$ şi $v_{v'}$ reprezintă $v_{x'}$ respectiv $v_{y'}$ împărţite cu f, ecuaţiile (6.52) vor trebui să fie doar împărţite cu H, rezultând:

$$\begin{aligned} dX'_i - l'_{X_i} &= v'_{X_i} \ , \\ dY'_i - l'_{Y_i} &= v'_{Y_i} \ , \\ dZ'_i - l'_{Z_i} &= v'_{Z_i} \ , \end{aligned} \tag{6.53}$$

necunoscutele dX', dY', dZ' având aceeaşi semnificaţie ca şi în relaţiile (6.50). Notând vectorul acestora cu $\ddot{\Delta}_i$, vectorul termenilor liberi cu l'_i şi vectorul corecţiilor cu V'_i, ecuaţiile (6.53) se vor putea scrie sub forma:

$$\ddot{\Delta}_i - l'_i = V'_i \ . \tag{6.54}$$

În mod similar, dacă se dispune de valori măsurate pentru parametrii orientării exterioare, se va mai adăuga câte un set de ecuaţii pentru fiecare fascicul k pe baza egalităţilor

$$\begin{aligned} X_o &= X_o^m + v_{X_o} & & & X_o &= X_o^o + dX_o \\ Y_o &= Y_o^m + v_{Y_o} & & & Y_o &= Y_o^o + dY_o \\ Z_o &= Z_o^m + v_{Z_o} & & \text{respectiv} & Z_o &= Z_o^o + dZ_o \\ \omega &= \omega^m + v_\omega & & & \omega &= \omega^o + d\omega \\ \varphi &= \varphi^m + v_\varphi & & & \varphi &= \varphi^o + d\varphi \\ \kappa &= \kappa^m + v_\kappa & & & \kappa &= \kappa^o + d\kappa \end{aligned}$$

de unde rezultă:

$$\begin{aligned} dX_o - \left(X_o^m - X_o^o\right) &= v_{X_o} \\ dY_o - \left(Y_o^m - Y_o^o\right) &= v_{Y_o} \\ dZ_o - \left(Z_o^m - Z_o^o\right) &= v_{Z_o} \\ d\omega - \left(\omega^m - \omega^o\right) &= v_\omega \\ d\varphi - \left(\varphi^m - \varphi^o\right) &= v_\varphi \\ d\kappa - \left(\kappa^m - \kappa^o\right) &= v_\kappa \end{aligned} \tag{6.55}$$

cu observaţia că indicele superior " k " a fost omis pentru a nu încărca notaţiile.

Scanned with OKEN Scanner

După cum se ştie, în cazul fotogrammetriei terestre, elementele de orientare exterioară ale fiecărui fascicul sunt determinate prin măsurători în teren. În cazul aerofotogrammetriei însă, trebuie remarcat că până în prezent nu s-au realizat dispozitive cu ajutorul cărora să se poată măsura eficient şi cu o precizie corespunzătoare rotaţiile. Totuşi, fotogramele putând fi considerate în general nadirale, centrele de perspectivă coliniare, şi traseele benzilor succesive paralele, rotaţiile pot fi aproximate cu zero, corecţiile lor obţinându-se cu ajutorul relaţiilor (6.51). Referitor la coordonatele centrelor de perspectivă trebuie precizat că acestea se pot obţine prin măsurători GPS (după cum se va vedea în paragraful 6.3.4.b) şi prin urmare, în această situaţie se vor putea utiliza primele 3 din relaţiile (6.55). Desigur însă, ca şi în cazul punctelor de reper, aceste ecuaţii vor trebui normalizate prin împărţire cu H (dacă ne referim la sistemul (6.51) provenit din (6.50)).

Ecuaţiile de corecţii corespunzătoare parametrilor orientării exterioare a unui fascicul k se pot scrie matriceal sub forma:

$$\dot{\Delta}^k - l''^k = V''^k \ . \tag{6.56}$$

unde $\dot{\Delta}^k$ este vectorul corecţiilor necunoscute, iar l'' şi V'' sunt vectorii ce conţin termenii liberi şi respectiv corecţiile valorilor măsurate ale parametrilor de orientare.

Fie un bloc, conţinând m fotograme (respectiv fascicule) şi n puncte cu coordonate-teren necunoscute, dintre care r sunt puncte de reper. Din considerente de generalitate, se va presupune că fiecare din cele n puncte apare pe toate cele m fotograme, urmând ca în faza de calcul să se genereze ecuaţiile conform situaţiei concrete. În aceste condiţii (după cum se arată în [2]), pentru un punct j va rezulta următorul sistem de ecuaţii:

$$\underset{(2m,6m)}{\begin{pmatrix} \dot{B}_j^1 & & & \\ & \dot{B}_j^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \dot{B}_j^m \end{pmatrix}} \underset{(6m,1)}{\begin{pmatrix} \dot{\Delta}^1 \\ \dot{\Delta}^2 \\ \vdots \\ \dot{\Delta}^m \end{pmatrix}} + \underset{(2m,3)}{\begin{pmatrix} \ddot{B}_j^1 \\ \ddot{B}_j^2 \\ \vdots \\ \ddot{B}_j^m \end{pmatrix}} \underset{(3,1)}{\ddot{\Delta}_j} - \underset{(2m,1)}{\begin{pmatrix} l_j^1 \\ l_j^2 \\ \vdots \\ l_j^m \end{pmatrix}} = \underset{(2m,1)}{\begin{pmatrix} V_j^1 \\ V_j^2 \\ \vdots \\ V_j^m \end{pmatrix}}$$

care poate fi scris mai simplu sub forma:

$$\dot{B}_j \dot{\Delta} + \ddot{B}_j \ddot{\Delta}_i - l_j = V_j \ . \tag{6.57}$$

Setul complet de ecuaţii de coliniaritate pentru cele n puncte va fi:

Scanned with OKEN Scanner

$$\underset{(2mn,6m)}{\begin{pmatrix}\dot{B}_1\\ \dot{B}_2\\ \vdots\\ \dot{B}_n\end{pmatrix}} \underset{(6m,1)}{\dot{\Delta}} + \underset{(2mn,3n)}{\begin{pmatrix}\ddot{B}_1 & & & \\ & \ddot{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddot{B}_n\end{pmatrix}} \underset{(3n,1)}{\begin{pmatrix}\ddot{\Delta}_1\\ \ddot{\Delta}_2\\ \vdots\\ \ddot{\Delta}_n\end{pmatrix}} - \underset{(2mn,1)}{\begin{pmatrix}l_1\\ l_2\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix}} = \underset{(2mn,1)}{\begin{pmatrix}V_1\\ V_2\\ \vdots\\ V_n\end{pmatrix}}$$

sau, în scriere simplificată,

$$\dot{B}\,\dot{\Delta} + \ddot{B}\,\ddot{\Delta} - l = V \ . \tag{6.58}$$

Acestor ecuaţii li se vor adăuga cele corespunzătoare punctelor de reper şi cele privind parametrii orientării exterioare. Tot din considerente de generalitate, se va presupune că $r = n$, adică toate punctele dispun de coordonate determinate în teren şi că se cunosc valori măsurate pentru toţi parametrii de orientare.

În consecinţă, pentru cele n puncte având coordonate-teren măsurate se va putea scrie următorul sistem de ecuaţii de corecţii:

$$\underset{(3n,1)}{\begin{pmatrix}\ddot{\Delta}_1\\ \ddot{\Delta}_2\\ \vdots\\ \ddot{\Delta}_n\end{pmatrix}} - \underset{(3n,1)}{\begin{pmatrix}l'_1\\ l'_2\\ \vdots\\ l'_n\end{pmatrix}} = \underset{(3n,1)}{\begin{pmatrix}V'_1\\ V'_2\\ \vdots\\ V'_n\end{pmatrix}}$$

provenind din (6.54) şi care poate fi scris simplificat

$$\ddot{\Delta} - l' = V' \ . \tag{6.59}$$

Similar, setul complet de ecuaţii corespunzătoare parametrilor de orientare măsuraţi provenind din (6.56) va fi:

$$\underset{(6m,1)}{\begin{pmatrix}\dot{\Delta}^1\\ \dot{\Delta}^2\\ \vdots\\ \dot{\Delta}^m\end{pmatrix}} - \underset{(6m,1)}{\begin{pmatrix}l''^1\\ l''^2\\ \vdots\\ l''^m\end{pmatrix}} = \underset{(6m,1)}{\begin{pmatrix}V''^1\\ V''^2\\ \vdots\\ V''^m\end{pmatrix}}$$

sau, sub formă simplificată,

$$\dot{\Delta} - l'' = V'' \ . \tag{6.60}$$

Modelul matematic complet al compensării se va obţine pe baza ecuaţiilor (6.58), (6.59) şi (6.60):

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{cases} \dot{B}\,\dot{\Delta} + \ddot{B}\,\ddot{\Delta} - l = V \\ \qquad\quad \ddot{\Delta} - l' = V' \\ \dot{\Delta} \qquad - l'' = V'' \end{cases}$$

Acest sistem poate fi exprimat printr-o singură ecuaţie matriceală:

$$\overline{B}\,\Delta - \bar{l} = \overline{V}\ , \tag{6.61}$$

unde

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} \dot{B} & \ddot{B} \\ O & I \\ I & O \end{pmatrix}\ ,\quad \Delta = \begin{pmatrix} \dot{\Delta} \\ \ddot{\Delta} \end{pmatrix}\ ,\quad \bar{l} = \begin{pmatrix} l \\ l' \\ l'' \end{pmatrix}\ ,\quad \overline{V} = \begin{pmatrix} V \\ V' \\ V'' \end{pmatrix}\ .$$

Aplicând metoda pătratelor minime, rezultă următorul sistem de ecuaţii normale:

$$\underset{(6m+3n,6m+3n)}{\left(\overline{B}^{\mathrm{T}}\overline{P}\,\overline{B}\right)} \cdot \underset{(6m+3n,1)}{\Delta} = \underset{(6m+3n,1)}{\overline{B}^{\mathrm{T}}\overline{P}\,\bar{l}}\ , \tag{6.62}$$

unde $\overline{P}$ este matricea corespunzătoare a ponderilor.

Dacă se notează

$$N = \overline{B}^{\mathrm{T}}\overline{P}\,\overline{B} \qquad \text{şi} \qquad L = \overline{B}^{\mathrm{T}}\overline{P}\,\bar{l}\ ,$$

sistemul (6.62) se va putea scrie mai simpl,

$$N\,\Delta = L\ . \tag{6.63}$$

Pentru o prelucrare riguroasă este necesar să se ţină seama de ponderile măsurătorilor. Astfel, pentru o măsurătoare i, ponderea este definită de relaţia (C.59):

$$p_i = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_i^2}\ ,$$

unde σ_o^2 este varianţa unităţii de pondere. Prin urmare, dacă σ_j^k este matricea de varianţă-covarianţă a coordonatelor-imagine x_j^k, y_j^k:

$$\sigma_j^k = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}_j^k$$

matricea corespunzătoare a ponderilor va fi:

$$P_j^k = \sigma_o^2 \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}^{-2} \qquad (6.64)$$

Presupunând (după cum s-a specificat anterior) că punctul j apare pe toate cele m fotograme, matricea P_j va avea următoarea structură:

$$P_{j\,(2m,2m)} = \begin{pmatrix} P_j^1 & & & \\ & P_j^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_j^m \end{pmatrix},$$

iar matricea P corespunzătoare tuturor celor n puncte va fi

$$P_{(2mn,2mn)} = \begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_n \end{pmatrix}. \qquad (6.65)$$

După cum se observă, matricele P_j şi P sunt matrice diagonale, deoarece măsurătorile efectuate în diferitele puncte-imagine se pot considera necorelate.

Similar, notând cu σ'_j matricea de varianţă-covarianţă a coordonatelor-teren ale unui punct j:

$$\sigma'_j = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2 & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_Z^2 \end{pmatrix}_j,$$

matricea corespunzătoare a ponderilor va fi

$$P'_j = \sigma_o^2 \left(\sigma'_j\right)^{-2} \qquad (6.66)$$

Scanned with OKEN Scanner

Presupunând de asemenea că între coordonatele măsurate ale diferitelor puncte nu există corelaţii, matricea ponderilor pentru toate cele n puncte va avea structura:

$$P'_{(3n,3n)} = \begin{pmatrix} P'_1 & & & \\ & P'_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P'_n \end{pmatrix} . \qquad (6.67)$$

Pe de altă parte, dacă se notează cu σ''^k matricea de varianţă-covarianţă a parametrilor de orientare exterioară a fotogramei (fasciculului) k:

$$\sigma''^k = \begin{pmatrix} \sigma^2_{X_o} & \sigma_{X_oY_o} & \sigma_{X_oZ_o} & \sigma_{X_o\omega} & \sigma_{X_o\varphi} & \sigma_{X_o\kappa} \\ \sigma_{Y_oX_o} & \sigma^2_{Y_o} & \sigma_{Y_oZ_o} & \sigma_{Y_o\omega} & \sigma_{Y_o\varphi} & \sigma_{Y_o\kappa} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{\kappa X_o} & \sigma_{\kappa Y_o} & \sigma_{\kappa Z_o} & \sigma_{\kappa\omega} & \sigma_{\kappa\varphi} & \sigma^2_{\kappa} \end{pmatrix}^k ,$$

matricea corespunzătoare a ponderilor va fi

$$P''^k_{(6,6)} = \sigma_o^2 \left(\sigma''^k\right)^{-2} . \qquad (6.68)$$

Presupunând că între parametrii de orientare proprii diferitelor fotograme (fascicule) nu există corelaţii, matricea ponderilor pentru toate cele m fotograme va avea structura:

$$P''_{(6m,6m)} = \begin{pmatrix} P''^1 & & & \\ & P''^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P''^m \end{pmatrix} . \qquad (6.69)$$

Prin urmare, matricea totală a ponderilor $\overline{P}$ se va obţine pe baza matricelor P, P' şi P'' date de relaţiile (6.65), (6.67) şi (6.69):

$$\overline{P}_{(2mn+3n+6m,2mn+3n+6m)} = \begin{pmatrix} P & & \\ & P' & \\ & & P'' \end{pmatrix} . \qquad (6.70)$$

Matricea coeficienţilor N şi vectorul termenilor liberi L ai sistemului de ecuaţii normale (6.63) se vor putea scrie - având în vedere expresia dezvoltată (6.62) sub forma:

$$N=\overline{B}^{\mathrm{T}}\overline{P}\,\overline{B}=\begin{pmatrix}\dot{B}^{\mathrm{T}}P\dot{B}+P'' & \dot{B}^{\mathrm{T}}P\ddot{B}\\ \ddot{B}^{\mathrm{T}}P\dot{B} & \ddot{B}^{\mathrm{T}}P\ddot{B}+P'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underset{(6m,6m)}{\dot{N}} & \underset{(6m,3n)}{\overline{N}}\\ \underset{(3n,6m)}{\overline{N}^{\mathrm{T}}} & \underset{(3n,3n)}{\ddot{N}}\end{pmatrix} \tag{6.71}$$

$$L=\overline{B}^{\mathrm{T}}\overline{P}\,\overline{l}=\begin{pmatrix}\dot{B}^{\mathrm{T}}P\,l+P''\,l''\\ \ddot{B}^{\mathrm{T}}P\,l+P'\,l'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underset{(6m,1)}{\dot{L}}\\ \underset{(3n,1)}{\ddot{L}}\end{pmatrix} \tag{6.72}$$

Cu aceste notaţii, sistemul de ecuaţii normale (6.63) devine:

$$\begin{pmatrix}\dot{N} & \overline{N}\\ \overline{N}^{T} & \ddot{N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\Delta}\\ \ddot{\Delta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{L}\\ \ddot{L}\end{pmatrix} \tag{6.73}$$

sau, detaliind submatricele componente,

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}
\underset{(6,6)}{\dot{N}^1} & & & & \overline{N}_1^1 & \overline{N}_2^1 & \cdots & \overline{N}_n^1\\
 & \dot{N}^2 & & & \overline{N}_1^2 & \overline{N}_2^2 & \cdots & \overline{N}_n^2\\
 & & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
 & & & \dot{N}^m & \overline{N}_1^m & \overline{N}_2^m & \cdots & \overline{N}_n^m\\
\hdashline
\overline{N}_1^{1\mathrm{T}} & \overline{N}_1^{2\mathrm{T}} & \cdots & \overline{N}_1^{m\mathrm{T}} & \underset{(3,3)}{\ddot{N}_1} & & & \\
\overline{N}_2^{1\mathrm{T}} & \overline{N}_2^{2\mathrm{T}} & \cdots & \overline{N}_2^{m\mathrm{T}} & & \ddot{N}_2 & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \ddots & \\
\overline{N}_n^{1\mathrm{T}} & \overline{N}_n^{2\mathrm{T}} & \cdots & \overline{N}_n^{m\mathrm{T}} & & & & \ddot{N}_n
\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\dot{\Delta}^1\\ \dot{\Delta}^2\\ \vdots\\ \dot{\Delta}^m\\ \hdashline \ddot{\Delta}_1\\ \ddot{\Delta}_2\\ \vdots\\ \ddot{\Delta}_n\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\dot{L}^1\\ \dot{L}^2\\ \vdots\\ \dot{L}^m\\ \hdashline \ddot{L}_1\\ \ddot{L}_2\\ \vdots\\ \ddot{L}_n\end{array}\right) \tag{6.74}$$

Rezolvarea directă a acestui sistem de ecuaţii de dimensiuni $6m+3n$ ar reprezenta o soluţie nepractică chiar pentru blocuri mai mici, dar mai ales pentru blocuri mari, conţinând sute de fotograme. Pentru a dezvolta un algoritm eficient de rezolvare, va trebui să se ţină seama de structura matricei N. În legătură cu aceasta, se pot face următoarele observaţii:

- matricea N este simetrică faţă de diagonala principală;
- fiecare submatrice $\dot{N}^k$ este de dimensiuni 6×6 şi corespunde unei fotograme k;
- fiecare submatrice $\ddot{N}_j$ este de dimensiuni 3×3 şi corespunde unui punct j;

- fiecare submatrice $\overline{N}_j^k$ este de dimensiuni 6×3 şi corespunde unui punct j măsurat pe fotograma k;

- dacă punctul j nu apare pe fotograma k, atunci $\overline{N}_j^k = O$ şi aceasta este situaţia majorităţii submatricelor $\overline{N}_j^k$, ceea ce face ca matricea N să fie de tip bandă.

De asemenea, se poate remarca faptul că fiecare submatrice $\dot{N}^k, \ddot{N}_j, \overline{N}_j^k$ şi fiecare subvector $\dot{L}^k, \ddot{L}_j$ se poate calcula (având în vedere relaţiile (6.71) şi (6.72)) pe baza unor formule simple:

$$\begin{aligned}
\dot{N}^k &= \sum_{j=1}^{n} \left(\dot{B}_j^k\right)^{\mathrm{T}} P_j^k \dot{B}_j^k + P''^k \quad , \\
\ddot{N}_j &= \sum_{k=1}^{m} \left(\ddot{B}_j^k\right)^{\mathrm{T}} P_j^k \ddot{B}_j^k + P'_j \quad , \\
\overline{N}_j^k &= \left(\dot{B}_j^k\right)^{\mathrm{T}} P_j^k \ddot{B}_j^k \quad , \\
\dot{L}^k &= \sum_{j=1}^{n} \left(\dot{B}_j^k\right)^{\mathrm{T}} P_j^k l_j^k + P''^k l''^k \quad , \\
\ddot{L}_j &= \sum_{k=1}^{m} \left(\ddot{B}_j^k\right)^{\mathrm{T}} P_j^k l_j^k + P'_j l'_j \quad .
\end{aligned} \tag{6.75}$$

O caracteristică importantă legată de structura ecuaţiilor normale constă în aceea că se poate determina contribuţia fiecărui set de ecuaţii de corecţii la ecuaţiile normale şi se poate adăuga direct submatricelor corespunzătoare ale sistemului normal. Fie de exemplu, punctul de sprijin 2 a cărui imagine apare pe fotograma 1. Acesta va genera două ecuaţii de corecţii de forma (6.51) definite prin submatricele $\dot{B}_2^1, \ddot{B}_2^1$ şi l_2^1 şi având ponderea P_2^1 şi alte 3 ecuaţii de corecţii de forma (6.54) definite de l'_2 şi submatricea ponderilor P'_2. Pe baza acestor elemente se va determina submatricea $\overline{N}_2^1$ şi se vor calcula contribuţiile la submatricele $\dot{N}^1, \ddot{N}_2, \dot{L}^1, \ddot{L}_2$.

Totuşi, după cum s-a precizat anterior, rezolvarea directă a sistemului (6.74), cu toate simplificările ce rezultă din observaţiile prezentate aici, ar constitui o soluţie nepractică. O reducere considerabilă a dimensiunilor sistemului de ecuaţii normale se poate obţine însă pornind de la forma (6.73), care se poate reprezenta explicit printr-un sistem de două ecuaţii matriceale:

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{cases} \dot{N}\ \dot{\Delta} + \overline{N}\,\ddot{\Delta} = \dot{L} \\ \overline{N}^{\mathrm{T}}\,\dot{\Delta} + \ddot{N}\,\ddot{\Delta} = \ddot{L} \end{cases} . \tag{6.76}$$

Necunoscutele sunt grupate aici în doi vectori: $\dot{\Delta}$ cu $6m$ elemente şi $\ddot{\Delta}$ cu $3n$ elemente. Deoarece de obicei numărul necunoscutelor din a doua grupă este mai mare, se determină $\ddot{\Delta}$ din a doua ecuaţie a sistemului (6.76):

$$\ddot{\Delta} = \ddot{N}^{-1}\left(\ddot{L} - \overline{N}^{\mathrm{T}}\dot{\Delta}\right) \tag{6.77}$$

şi se substituie în prima, rezultând:

$$\left(\dot{N} - \overline{N}\,\ddot{N}^{-1}\overline{N}^{\mathrm{T}}\right)\dot{\Delta} = \left(\dot{L} - \overline{N}\,\ddot{N}^{-1}\ddot{L}\right) . \tag{6.78}$$

Acesta este **sistemul ecuaţiilor normale reduse** şi poate fi scris simplificat sub forma:

$$\underset{(6m,6m)}{\hat{N}} \cdot \underset{(6m,1)}{\dot{\Delta}} = \underset{(6m,1)}{\hat{L}} \tag{6.79}$$

notaţiile utilizate fiind evidente.

Astfel, dimensiunile sistemului de ecuaţii liniare care urmează a fi rezolvat s-au redus la $6m$. Totodată, trebuie subliniat faptul că practic, ecuaţiile normale reduse se pot genera direct, fără a mai forma sistemul ecuaţiilor de corecţii.

Ca şi în cazul compensării modelelor independente, matricea coeficienţilor este de tip bandă, lăţimea acestei benzi depinzând de modul de numerotare a fotogramelor. Pentru exemplificare, se va considera un bloc format din 3 benzi cu câte 7 fotograme (fig.6.18) având o dispunere regulată. Lăţimea benzii matricei coeficienţilor este caracterizată de mărimea p, care pentru un bloc ale cărui fotograme au acoperire longitudinală stereoscopică (de aprox. 66%) şi acoperire transversală simplă (de aprox 25%) se poate calcula cu formulele:

$p = 6(n_f + 3)$, dacă numerotarea este longitudinală, sau

$p = 6(2n_b + 2)$, dacă numerotarea este transversală,

cu n_f şi n_b notându-se numărul fotogramelor dintr-o bandă şi respectiv numărul benzilor care alcătuiesc blocul.

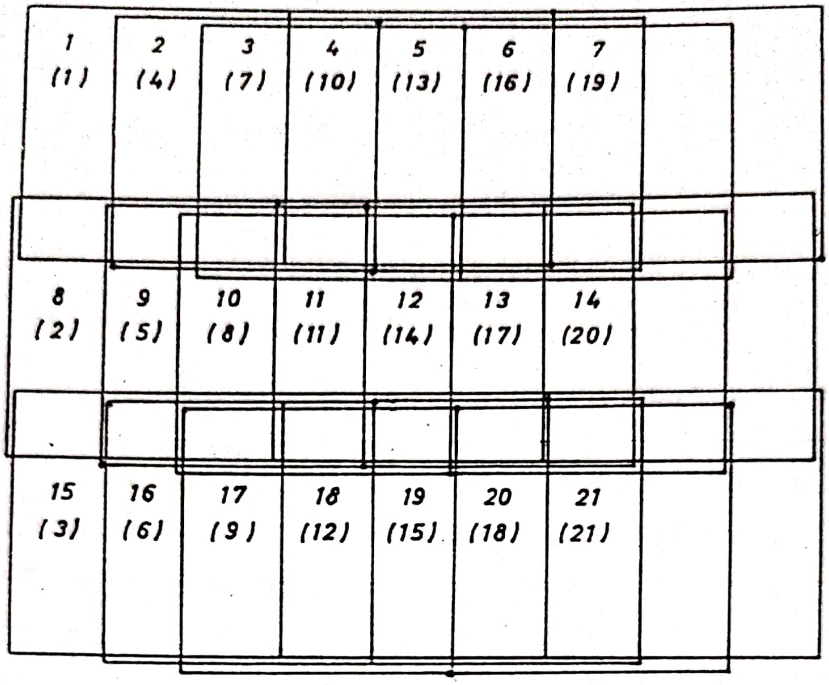

Figura 6.18. Bloc format din 21 de fotograme numerotate în două moduri.

Astfel, referitor la exemplul considerat, se poate constata că în cazul numerotării longitudinale a fotogramelor $p = 6 \cdot 10 = 60$ de elemente (fig.6.19), iar în cazul numerotării transversale $p = 6 \cdot 8 = 48$ de elemente (fig.6.20), lățimea benzii fiind deci mai mică.

Pe de altă parte, ca şi la compensarea în bloc cu modele independente, se poate remarca faptul că submatricele de pe diagonala principală corespund fiecăreia din cele 21 de fotograme şi conţin elemente referitoare la măsurătorile efectuate pe aceste fotograme. Apoi, submatricele alăturate acestora (fig.6.19) se referă la legăturile longitudinale dintre fotograme, iar şirurile marginale de submatrice (haşurate spre dreapta) semnifică legăturile transversale, fiecare dintre aceste submatrice conţinând elemente privind punctele care asigură aceste legături. În ceea ce priveşte cazul prezentat în figura 6.20, se poate observa că submatricele referitoare la legăturile longitudinale (haşurate spre dreapta) şi cele privind legăturile tranversale (haşurate spre stânga) nu mai sunt grupate, dar structura benzii este mai compactă, banda având - după cum s-a arătat anterior - o lățime mai mică.

Scanned with OKEN Scanner

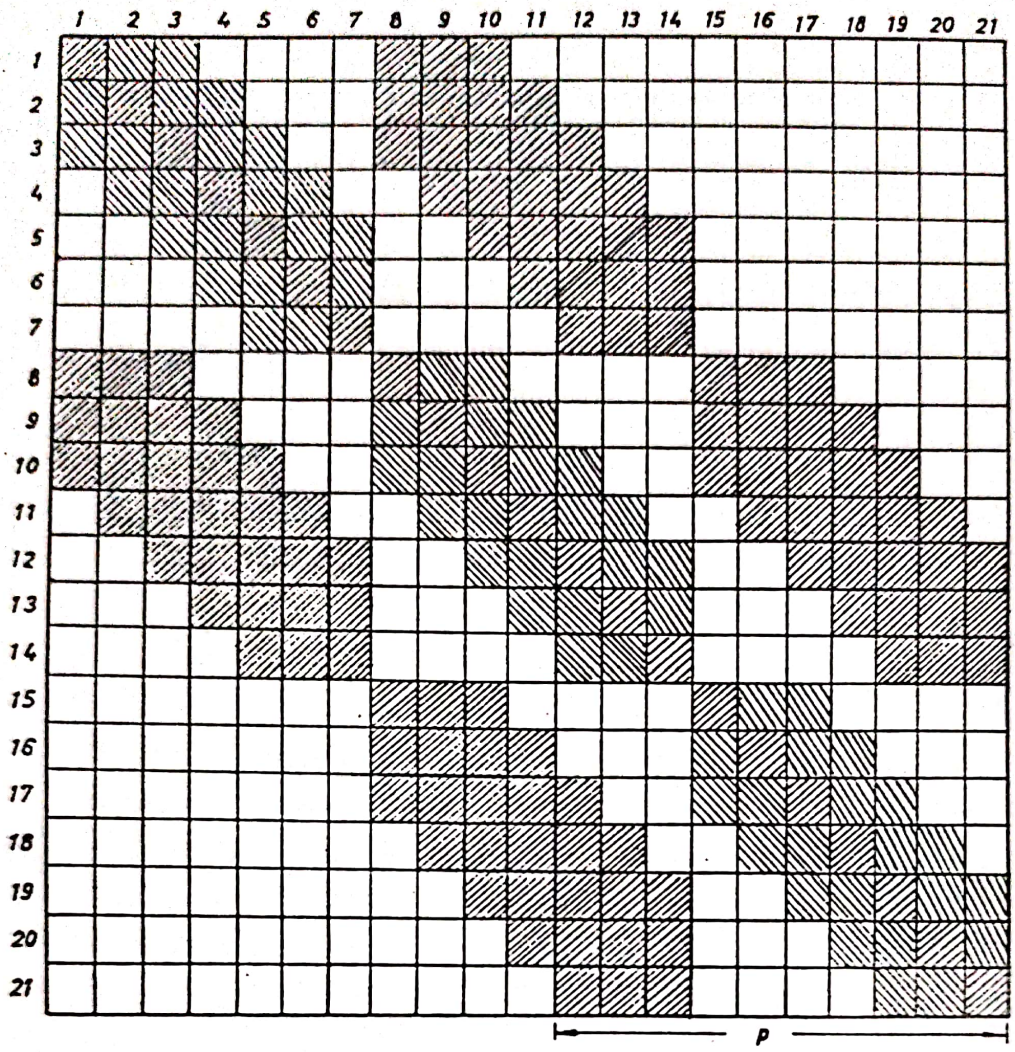

Figura 6.19. Structura matricei coeficienţilor ecuaţiilor normale reduse în cazul numerotării longitudinale a fotogramelor.

Mai trebuie precizat că sistemul ecuaţiilor normale reduse poate fi generat direct, calculând şi cumulând contribuţia fiecărui punct la acest sistem. Un algoritm eficient de rezolvare a acestei probleme este prezentat în [2] (ed. IV, paragraful 2.6.5). În ceea ce priveşte rezolvarea sistemului, aceasta este recomandabil să se facă prin metoda partiţionării recursive descrisă în paragraful B.3.3.c_2, cu observaţia că mărimea q va trebui luată egală cu 6, sau cu un multiplu de 6 (de exemplu $q = 6 \cdot n_b$, n_b fiind numărul benzilor de fotograme din bloc).

După obţinerea parametrilor de orientare ai tuturor fasciculelor, corecţiile coordonatelor-teren necunoscute vor putea fi calculate punct cu punct (datorită structurii diagonale a matricei $\ddot{N}^{-1}$) pe baza relaţiilor (6.77):

$$\ddot{\Delta}_j = \ddot{N}_j^{-1}\left(\ddot{L}_j - \overline{N}_j^{\mathrm{T}}\dot{\Delta}\right) . \qquad (6.80)$$

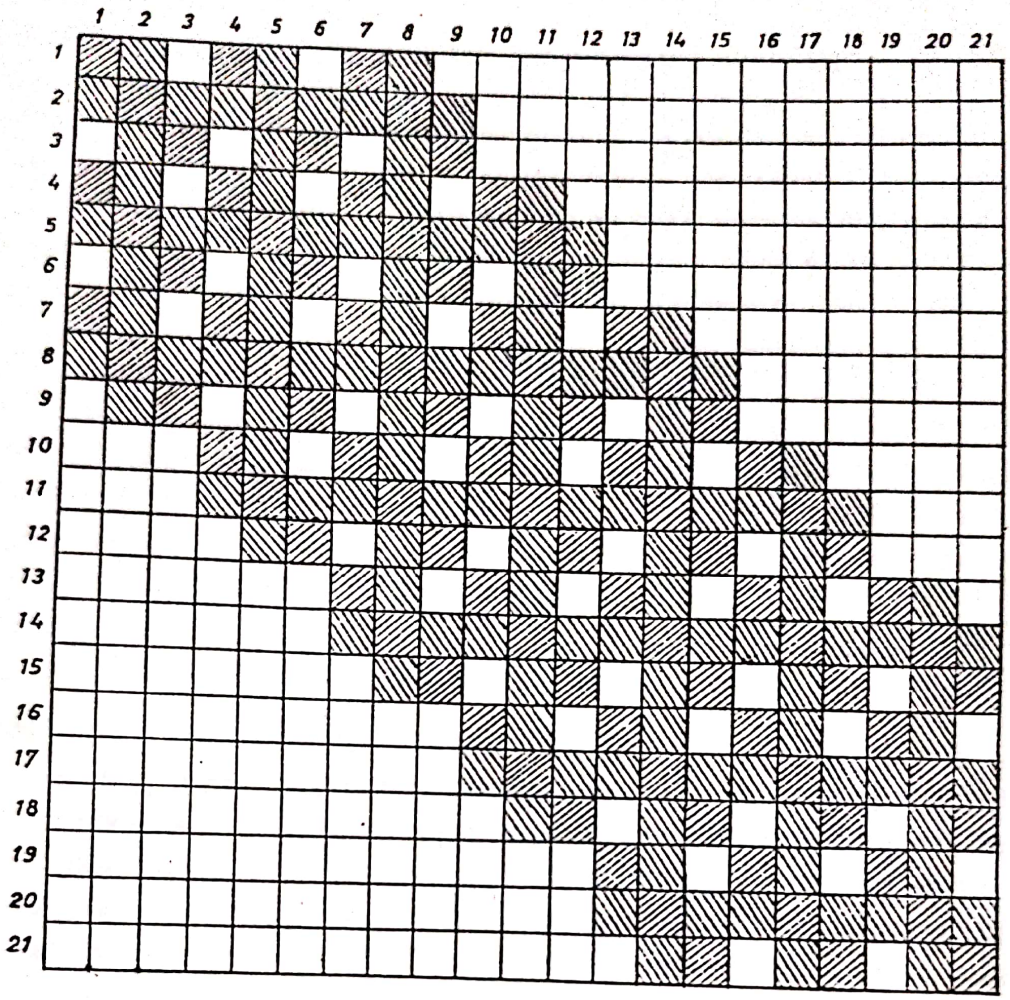

Figura 6.20. Structura matricei coeficienților ecuațiilor normale reduse în cazul numerotării transversale a fotogramelor.

Având în vedere că ecuațiile condiției de coliniaritate pe baza cărora se realizează compensarea nu sunt liniare, utilizându-se forma diferențială (aproximativă) a acestora, determinarea necunoscutelor se va face într-un proces iterativ. La fiecare iterație i, cu parametrii unghiulari corespunzători fiecărui fascicul $(d\omega^k, d\varphi^k, d\kappa^k)$ se formează matricele de rotație $R^k = (R^i\ R^{i-1})^k$, iar corecțiile liniare $\left(dX_o^k, dY_o^k, dZ_o^k, dX_j, dY_j, dZ_j\right)$ se adaugă valorilor (aproximative) anterioare $X_o^k = \left(X_o^{i-1} + dX_o^i\right)^k$ etc. Cu acestea se vor putea calcula valori îmbunătățite pentru x_j^k, y_j^k folosind relațiile (3.8) sub forma:

$$x_j^k = -f\frac{r_{11}^k\left(X_j - X_o^k\right) + r_{21}^k\left(Y_j - Y_o^k\right) + r_{31}^k\left(Z_j - Z_o^k\right)}{r_{13}^k\left(X_j - X_o^k\right) + r_{23}^k\left(Y_j - Y_o^k\right) + r_{33}^k\left(Z_j - Z_o^k\right)}$$

$$y_j^k = -f\frac{r_{12}^k\left(X_j - X_o^k\right) + r_{22}^k\left(Y_j - Y_o^k\right) + r_{32}^k\left(Z_j - Z_o^k\right)}{r_{13}^k\left(X_j - X_o^k\right) + r_{23}^k\left(Y_j - Y_o^k\right) + r_{33}^k\left(Z_j - Z_o^k\right)} \qquad (6.81)$$

sau, în cazul utilizării parametrilor directori,

$$u_j^k = \frac{r_{11}^k\left(X_j - X_o^k\right) + r_{21}^k\left(Y_j - Y_o^k\right) + r_{31}^k\left(Z_j - Z_o^k\right)}{r_{13}^k\left(X_j - X_o^k\right) + r_{23}^k\left(Y_j - Y_o^k\right) + r_{33}^k\left(Z_j - Z_o^k\right)}$$

$$v_j^k = \frac{r_{12}^k\left(X_j - X_o^k\right) + r_{22}^k\left(Y_j - Y_o^k\right) + r_{32}^k\left(Z_j - Z_o^k\right)}{r_{13}^k\left(X_j - X_o^k\right) + r_{23}^k\left(Y_j - Y_o^k\right) + r_{33}^k\left(Z_j - Z_o^k\right)} \qquad (6.82)$$

Se va putea trece astfel la o nouă iteraţie, calculând noi valori pentru coeficienţii şi termenii liberi corespunzători fiecărui punct, generând (punct cu punct) sistemul de ecuaţii normale reduse şi obţinând (prin rezolvarea acestuia) un nou set de corecţii pentru parametrii de orientare ai fiecărui fascicul. Se vor putea calcula acum şi corecţiile coordonatelor-teren necunoscute şi se va relua procesul iterativ, dacă nu sunt îndeplinite condiţiile pentru oprirea iteraţiilor. Acestea se pot referi de exemplu la corecţiile parametrilor de orientare având forma (3.32) ce concretizează relaţia (C.74). Pot fi utilizate însă şi alte criterii, cum ar fi cele exprimate prin relaţiile (C.75) - (C.81). Desigur, va trebui impus şi un număr maxim de iteraţii.

În ceea ce priveşte evaluarea preciziei compensării (privind parametrii de orientare şi coordonatele-teren ale punctelor de aerotriangulaţie), aceasta se poate aprecia cu ajutorul matricelor de varianţă-covarianţă ale celor două grupe de necunoscute ($\dot{\Delta}$ şi respectiv $\ddot{\Delta}$):

$$\sigma_{\dot{\Delta}}^2 = \sigma_o^2 \hat{N}^{-1} \qquad (6.83)$$

$$\sigma_{\ddot{\Delta}_j}^2 = \sigma_o^2 \ddot{N}_j^{-1} + \left(\ddot{N}_j^{-1}\overline{N}_j^{\mathrm{T}}\right)\sigma_{\dot{\Delta}}^2\left(\ddot{N}_j^{-1}\overline{N}_j^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}, \qquad (6.84)$$

unde σ_o^2 este varianţa unităţii de pondere.

O problemă importantă pe care o implică orice proces iterativ este **determinarea unor valori aproximative iniţiale** ale necunoscutelor şi cărora li se vor adăuga apoi corecţiile calculate în fiecare iteraţie. Pentru a obţine aceste valori

aproximative se poate proceda ca şi în cazul compensării modelelor independente din paragraful anterior.

Astfel, presupunând fotogramele nadirale, valorile aproximative ale înclinărilor vor fi $\omega^o = \varphi^o = 0$ pentru toate fasciculele, iar ceilalţi 4 parametri de orientare ai fiecărei fotograme se pot determina pe baza formulelor transformării conforme plane (A.4). Ca şi în cazul menţionat, pentru fiecare punct de reper se poate scrie o pereche de ecuaţii de forma (6.41), iar pentru fiecare punct de legătură o pereche de ecuaţii de forma (6.42). Neluând în considerare (în această fază) erorile mărimilor măsurate, se va întocmi un sistem cu tot atâtea ecuaţii câte necunoscute implică cele m fotograme şi anume $4m$. Aceste ecuaţii vor trebui scrise pentru un număr minim necesar de puncte (dispuse corespunzător cerinţelor geometrice) care să asigure legarea planimetrică a fotogramelor în bloc şi transformarea acestuia în sistemul de coordonate-teren. Dacă se consideră un exemplu similar celui prezentat în figura 6.14 (cu observaţia că acum în loc de modele, fiecare din cele două benzi va fi alcătuită din 3 fotograme), schema legăturilor va fi asemănătoare (fig.6.21), iar numărul ecuaţiilor şi al necunoscutelor va fi acelaşi ca şi în cazul menţionat.

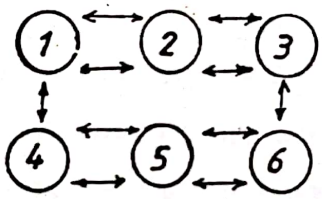

Figura 6.21. Legăturile strict necesare unui bloc planimetric cu 6 fotograme.

Prin urmare, pentru fiecare fotogramă se vor determina astfel translaţiile aproximative $X_o^{o^k}, Y_o^{o^k}$, valoarea aproximativă a rotaţiei κ^{o^k}

$$\left(sin\kappa^{o^k} = b_1^k / m^k, cos\kappa^{o^k} = a_1^k / m^k\right)$$

şi factorul de scară aproximativ $m^{o^k} = \sqrt{\left(a_1^k\right)^2 + \left(b_1^k\right)^2}$ care va servi la calculul valorii aproximative a înălţimii relative de zbor H^o şi a translaţiei $Z_o^{o^k}$ utilizând o formulă asemănătoare relaţiei (6.25):

$$H^{o^k} = m^{o^k} f \quad , \quad Z_o^{o^k} = H^{o^k} + Z_m \quad ,$$

unde Z_m este cota medie a terenului din porţiunea corespunzătoare fotogramei k.

Scanned with OKEN Scanner

Cu ajutorul acestor parametri se vor putea calcula acum coordonatele-teren aproximative. Pentru a obţine coordonatele planimetrice X_j ,Y_j se pot folosi relaţiile (A.4) care, pentru un punct j determinat din fotograma k, vor avea forma (6.37). În cazul unui punct comun mai multor fotograme se vor obţine mai multe perechi de coordonate planimetrice, luându-se mediile corespunzătoare ale acestora. Referitor la cote, valorile lor aproximative se pot determina cu ajutorul unui plan cu curbe de nivel. Dacă terenul nu este prea accidentat, mărimea Z_j se poate considera constantă şi egală cu cota medie Z_m din zona corespunzătoare blocului, sau se poate considera local constantă în anumite porţiuni de teren (respectiv pentru punctele situate în acele porţiuni).

O soluţie mai eficientă a problemei valorilor aproximative, permiţând totodată detectarea şi eliminarea erorilor mari, o constituie formarea benzilor de aerotriangulaţie. În acest fel, punctele măsurate sunt verificate şi (eventual) corectate succesiv la legarea modelelor, iar coordonatele-teren obţinute vor putea fi considerate ca valori aproximative pentru compensarea ulterioară. Parametrii de orientare aproximativi corespunzători fiecărei fotograme se pot determina pe baza matricelor de rotaţie şi a translaţiilor ce rezultă la orientarea relativă a fiecărei stereograme şi la orientarea absolută a modelului general al benzii.

Cu ajutorul valorilor aproximative ale parametrilor de orientare exterioară şi ale coordonatelor-teren se pot calcula valorile aproximative corespunzătoare ale coordonatelor-imagine $x_j^{o^k}$,$y_j^{o^k}$ sau ale parametrilor directori $u_j^{o^k}$,$v_j^{o^k}$ cu relaţiile (6.81) respectiv (6.82). Acestea, împreună cu $H^o = m^o f$ vor permite calculul coeficienţilor şi termenilor liberi ai ecuaţiilor de corecţii (6.49) respectiv (6.50) şi deci începerea procesului iterativ, care se va desfăşura după modul descris anterior.

6.4. Cazuri speciale de aerotriangulaţie

6.4.1. COMPENSAREA SIMULTANĂ A OBSERVAŢIILOR FOTOGRAMMETRICE ŞI GEODEZICE

În cadrul metodelor clasice de aerotriangulaţie analitică (dezvoltate în paragrafele anterioare), compensarea măsurătorilor fotogrammetrice şi a celor geodezice sunt tratate distinct ca două probleme independente. De obicei se execută întâi observaţiile geodezice şi se compensează, obţinând coordonatele-teren ale punctelor de sprijin. Acestea vor constitui date de intrare pentru compensarea aerotriangulaţiei în cadrul căreia se prelucrează doar măsurătorile

fotogrammetrice. Trebuie remarcat faptul că şi în cazul în care coordonatele punctelor de sprijin se consideră afectate de erori şi intervin în compensare cu ponderile corespunzătoare, prelucrarea nu se referă la măsurătorile geodezice iniţiale. Această situaţie conduce la un decalaj în timp şi tehnologic în cadrul procesului de aerotriangulaţie.

Prin urmare, abordarea integrată a acestor două probleme prin compensarea simultană a tuturor observaţiilor fotogrammetrice şi geodezice reprezintă o soluţie superioară din punctul de vedere al rigurozităţii tratării, precum şi al eficienţei. De asemenea, această soluţie prezintă avantajul posibilităţii utilizării cu uşurinţă şi a altor elemente de legătură cu terenul decât punctele de sprijin rezultate de exemplu din măsurători de distanţe etc.

Ca observaţii geodezice (care vor fi compensate simultan cu cele fotogrammetrice) se vor considera distanţe, azimute, unghiuri orizontale, distanţe zenitale şi diferenţe de nivel. Trebuie remarcat totodată faptul că pentru a putea fi prelucrate simultan, ecuaţiile observaţiilor geodezice şi fotogrammetrice trebuie exprimate în acelaşi sistem de coordonate. Acest lucru trebuie subliniat având în vedere că geodezia clasică tratează compensarea planimetrică şi altimetrică separat, prima efectuându-se pe suprafaţa elipsoidului de referinţă.

Fie D_{ij} **distanţa** măsurată direct între punctele i şi j , redusă la planul de proiecţie şi $v_{D_{ij}}$ corecţia corespunzătoare. Prin urmare,

$$D_{ij} = D_{ij}^{m} + v_{D_{ij}} \ . \tag{6.85}$$

Pe de altă parte, distanţa D_{ij} poate fi exprimată în funcţie de coordonatele rectangulare ale punctelor i şi j prin formula:

$$D_{ij} = \left(\left(X_j - X_i \right)^2 + \left(Y_j - Y_i \right)^2 + \left(Z_j - Z_i \right)^2 \right)^{1/2} \ . \tag{6.86}$$

Această relaţie fiind neliniară în raport cu X, Y şi Z, se poate scrie sub forma:

$$D_{ij} = D_{ij}^{o} + dD_{ij} \ , \tag{6.87}$$

unde D_{ij}^{o} este valoarea distanţei obţinută cu formula (6.86) pe baza valorilor aproximative ale coordonatelor (X^o, Y^o, Z^o), iar corecţia dD_{ij} este dată de relaţia:

Scanned with OKEN Scanner

$$dD_{ij}=\left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial X_i}\right)^{\circ} dX_i+\left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial Y_i}\right)^{\circ} dY_i+\left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial Z_i}\right)^{\circ} dZ_i+\left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial X_j}\right)^{\circ} dX_j+$$
$$+\left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial Y_j}\right)^{\circ} dY_j+\left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial Z_j}\right)^{\circ} dZ_j \ . \qquad (6.88)$$

Dacă se egalează D_{ij} din (6.85) şi (6.87), rezultă:

$$dD_{ij}-\left(D_{ij}^{m}-D_{ij}^{o}\right)=v_{D_{ij}} \qquad (6.89)$$

şi notând

$$a_{D_{ij}}=\left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial X_j}\right)^{\circ}=\frac{X_j^o-X_i^o}{D_{ij}^o} \ , \quad b_{D_{ij}}=\left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial Y_j}\right)^{\circ}=\frac{Y_j^o-Y_i^o}{D_{ij}^o} \ ,$$

$$c_{D_{ij}}=\left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial Z_j}\right)^{\circ}=\frac{Z_j^o-Z_i^o}{D_{ij}^o} \ , \quad l_{D_{ij}}=D_{ij}^{m}-D_{ij}^{o} \ ,$$

se obţine următoarea ecuaţie de corecţii:

$$-a_{D_{ij}}dX_i-b_{D_{ij}}dY_i-c_{D_{ij}}dZ_i+a_{D_{ij}}dX_j+b_{D_{ij}}dY_j+c_{D_{ij}}dZ_j-l_{D_{ij}}=v_{D_{ij}} \ . \qquad (6.90)$$

În particular, dacă punctul i (de ex.) este punct de sprijin (considerat fix), atunci $dX_i = dY_i = dZ_i = 0$ şi ecuaţia (6.90) devine:

$$a_{D_{ij}}dX_j+b_{D_{ij}}dY_j+c_{D_{ij}}dZ_j-l_{D_{ij}}=v_{D_{ij}} \ .$$

Împărţind ecuaţia (6.90) cu D_{ij}^o :

$$-\frac{a_{D_{ij}}}{D_{ij}^o}dX_i-\frac{b_{D_{ij}}}{D_{ij}^o}dY_i-\frac{c_{D_{ij}}}{D_{ij}^o}dZ_i+\frac{a_{D_{ij}}}{D_{ij}^o}dX_j+\frac{b_{D_{ij}}}{D_{ij}^o}dY_j+\frac{c_{D_{ij}}}{D_{ij}^o}dZ_j-\frac{l_{D_{ij}}}{D_{ij}^o}=v'_{D_{ij}} \qquad (6.91)$$

unde $v'_{D_{ij}}=v_{D_{ij}}/D_{ij}^o$ este corecţia pe unitatea de lungime, distanţele măsurate cu aceeaşi precizie relativă vor avea aceeaşi pondere în compensare.

Dacă p_D este numărul punctelor de aerotriangulaţie între care s-au măsurat d distanţe, setul complet al ecuaţiilor de corecţii poate fi exprimat matriceal sub forma:

Scanned with OKEN Scanner

$$\underset{(d,3p_D)}{G_D} \cdot \underset{(3p_D,1)}{\ddot{\Delta}_D} - \underset{(d,1)}{l_D} = \underset{(d,1)}{V_D} \,. \tag{6.92}$$

Fie acum θ_{ij}^m **azimutul** măsurat al direcţiei ij , corectat cu unghiul de convergenţă a meridianelor şi căruia i s-a aplicat corecţia de reducere la planul de proiecţie. Notând cu $v_{\theta_{ij}}$ corecţia acestei măsurători, se poate scrie:

$$\theta_{ij} = \theta_{ij}^m + v_{\theta_{ij}} \,. \tag{6.93}$$

Pe de altă parte, orientarea de la punctul i la punctul j se poate exprima în funcţie de coordonatele rectangulare plane ale acestor puncte prin formula:

$$\theta_{ij} = \operatorname{arctg}\frac{Y_j - Y_i}{X_j - X_i} \,. \tag{6.94}$$

Relaţia (6.94) nefiind liniară în raport cu coordonatele X,Y, se poate scrie sub forma:

$$\theta_{ij} = \theta_{ij}^o + d\theta_{ij} \,, \tag{6.95}$$

unde θ_{ij}^o este orientarea calculată cu coordonatele aproximative ale punctelor i şi j, iar corecţia $d\theta_{ij}$ este dată de relaţia:

$$d\theta_{ij} = \left(\frac{\partial\theta_{ij}}{\partial X_i}\right)^o dX_i + \left(\frac{\partial\theta_{ij}}{\partial Y_i}\right)^o dY_i + \left(\frac{\partial\theta_{ij}}{\partial X_j}\right)^o dX_j + \left(\frac{\partial\theta_{ij}}{\partial Y_j}\right)^o dY_j \,. \tag{6.96}$$

Dacă se egalează θ_{ij} din (6.93) şi (6.95), rezultă:

$$d\theta_{ij} - \left(\theta_{ij}^m - \theta_{ij}^o\right) = v_{\theta_{ij}} \tag{6.97}$$

şi notând

$$a_{\theta_{ij}} = \left(\frac{\partial\theta_{ij}}{\partial X_j}\right)^o = -\frac{Y_j^o - Y_i^o}{\left(D_{ij}^o\right)^2}, \quad b_{\theta_{ij}} = \left(\frac{\partial\theta_{ij}}{\partial Y_j}\right)^o = \frac{X_j^o - X_i^o}{\left(D_{ij}^o\right)^2}, \quad l_{\theta_{ij}} = \theta_{ij}^m - \theta_{ij}^o \,,$$

unde

$$\left(D_{ij}^o\right)^2 = \left(X_j^o - X_i^o\right)^2 + \left(Y_j^o - Y_i^o\right)^2 \,,$$

se obţine următoarea ecuaţie de corecţii:

$$-a_{0_{ij}}dX_i - b_{0_{ij}}dY_i + a_{0_{ij}}dX_j + b_{0_{ij}}dY_j - l_{0_{ij}} = v_{0_{ij}} \ . \qquad (6.98)$$

În particular, dacă punctul i (de ex.) este punct de sprijin (considerat fix), atunci $dX_i = dY_i = 0$ şi ecuaţia (6.98) devine:

$$a_{0_{ij}}dX_j + b_{0_{ij}}dY_j - l_{0_{ij}} = v_{0_{ij}} \ .$$

Dacă p_0 este numărul punctelor de aerotriangulaţie între care s-au măsurat t azimute, setul complet al ecuaţiilor de corecţii poate fi exprimat matriceal sub forma:

$$\underset{(t,2p_e)}{G_\theta} \cdot \underset{(2p_0,1)}{\ddot{\Delta}_\theta} - \underset{(t,1)}{l_\theta} = \underset{(t,1)}{V_\theta} \ . \qquad (6.99)$$

Fie β^m_{jik} **unghiul orizontal** măsurat în punctul i între direcţiile ij şi ik, redus la planul de proiecţie şi $v_{\beta_{jik}}$ corecţia corespunzătoare. Prin urmare, se poate scrie:

$$\beta_{jik} = \beta^m_{jik} + v_{\beta_{jik}} \ . \qquad (6.100)$$

Trebuie menţionat, totuşi, că de fapt se măsoară direcţiile ij şi ik, iar $v_{\beta_{jik}}$ este diferenţa corecţiilor acestor direcţii. Deci, pentru a utiliza relaţiile de forma (6.100) în aceeaşi manieră ca şi cele similare descrise anterior, se presupun toate direcţiile (între care se determină unghiuri) independente.

Pe de altă parte, unghiul β_{jik} se poate exprima ca diferenţă între orientările θ_{ik} şi θ_{ij}:

$$\beta_{jik} = \theta_{ik} - \theta_{ij} = \left(\theta^o_{ik} + d\theta_{ik}\right) - \left(\theta^o_{ij} + d\theta_{ij}\right), \qquad (6.101)$$

dezvoltarea făcându-se pe baza relaţiei (6.95).

Egalând β_{jik} din (6.100) şi (6.101), rezultă:

$$d\theta_{ik} - d\theta_{ij} - \left(\beta^m_{jik} - \theta^o_{ik} + \theta^o_{ij}\right) = v_{\beta_{jik}} \ . \qquad (6.102)$$

Având în vedere relaţia (6.98) şi notând termenul liber din (6.102) cu $l_{\beta_{jik}}$, se obţine următoarea ecuaţie de corecţii:

$$a_{0_{ik}}dX_k + b_{0_{ik}}dY_k - a_{0_{ij}}dX_j - b_{0_{ij}}dY_j - \left(a_{0_{ik}} - a_{0_{ij}}\right)dX_i - \left(b_{0_{ik}} - b_{0_{ij}}\right)dY_i - l_{\beta_{jik}} = v_{\beta_{jik}} \qquad (6.103)$$

În funcţie de natura punctelor i, j şi k, se pot obţine şi aici diferite cazuri particulare (după cum s-a arătat anterior).

Scanned with OKEN Scanner

Dacă p_β este numărul punctelor de aerotriangulaţie între care s-au determinat u unghiuri, setul complet al ecuaţiilor de corecţii poate fi exprimat matriceal sub forma:

$$\underset{(u,2p_\beta)}{G_\beta} \cdot \underset{(2p_\beta,1)}{\ddot{\Delta}_\beta} - \underset{(u,1)}{l_\beta} = \underset{(u,1)}{V_\beta} \ . \tag{6.104}$$

Fie z_{ij}^m **unghiul zenital** (distanţa zenitală) ce se măsoară în punctul i (fig.6.22) şi $v_{z_{ij}}$ corecţia corespunzătoare. Prin urmare

$$z_{ij} = z_{ij}^m + v_{z_{ij}} \ . \tag{6.105}$$

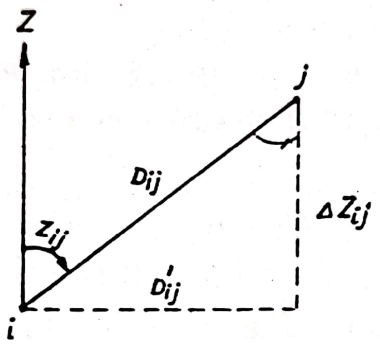

Figura 6.22. Unghiul zenital.

Pe de altă parte, unghiul zenital z_{ij} se poate exprima prin relaţia:

$$z_{ij} = arccos\frac{\Delta Z_{ij}}{D_{ij}} \ , \tag{6.106}$$

distanta D_{ij} fiind dată de formula (6.86) în funcţie de coordonatele rectangulare ale punctelor i şi j.

Expresia (6.106) a distanţei zenitale z_{ij} fiind neliniară în raport cu coordonatele punctelor, se va scrie sub forma:

$$z_{ij} = z_{ij}^o + dz_{ij} \ , \tag{6.107}$$

notaţiile fiind similare celor din cazurile anterioare.

Egalând z_{ij} din (6.105) şi (6.107), rezultă:

$$dz_{ij} - \left(z_{ij}^m - z_{ij}^o\right) = v_{zij} \tag{6.108}$$

şi notând

$$a_{z_{ij}} = \left(\frac{\partial z_{ij}}{\partial X_j}\right)^o = \left(ctg z_{ij}^o\right)\frac{X_j^o - X_i^o}{\left(D_{ij}^o\right)^2},\quad b_{z_{ij}} = \left(\frac{\partial z_{ij}}{\partial Y_j}\right)^o = \left(ctg z_{ij}^o\right)\frac{Y_j^o - Y_i^o}{\left(D_{ij}^o\right)^2},$$

$$c_{z_{ij}} = \left(\frac{\partial z_{ij}}{\partial Z_j}\right)^o = -\frac{\sin z_{ij}^o}{D_{ij}^o},\quad l_{z_{ij}} = z_{ij}^m - z_{ij}^o,$$

se obţine următoarea ecuaţie de corecţii:

$$-a_{z_{ij}}dX_i - b_{z_{ij}}dY_i - c_{z_{ij}}dZ_i + a_{z_{ij}}dX_j + b_{z_{ij}}dY_j + c_{z_{ij}}dZ_j - l_{z_{ij}} = v_{z_{ij}} \quad (6.109)$$

Ca şi în situaţiile anterioare, în funcţie de natura punctelor i şi j se pot obţine diferite forme particulare ale relaţiei (6.109).

Dacă p_z este numărul punctelor de aerotriangulaţie între care s-au măsurat s unghiuri zenitale, setul complet al ecuaţiilor de corecţii poate fi exprimat matriceal sub forma:

$$\underset{(s,3p_z)}{G_z} \cdot \underset{(3p_z,1)}{\ddot{\Delta}_z} - \underset{(s,1)}{l_z} = \underset{(s,1)}{V_z}. \quad (6.110)$$

Fie ΔZ_{ij} **diferenţa de nivel** între punctele i şi j, măsurată prin nivelment geometric şi $v_{\Delta Z_{ij}}$ corecţia corespunzătoare. Prin urmare, se poate scrie:

$$\Delta Z_{ij} = \Delta Z_{ij}^m + v_{\Delta Z_{ij}}. \quad (6.111)$$

Trebuie precizat că toate măsurătorile se presupun independente. Pe de altă parte, ΔZ_{ij} se poate exprima ca diferenţă între cotele punctelor j şi i:

$$\Delta Z_{ij} = Z_j - Z_i = \left(Z_j^o + dZ_j\right) - \left(Z_i^o + dZ_i\right), \quad (6.112)$$

Z_i^o şi Z_j^o fiind valorile aproximative ale acestor cote, iar dZ_i şi dZ_j corecţiile corespunzătoare.

Egalând ΔZ_{ij} din (6.111) şi (6.112), rezultă:

$$dZ_j - dZ_i - \left(\Delta Z_{ij}^m + Z_i^o - Z_j^o\right) = v_{\Delta Z_{ij}}$$

şi notând termenul liber (din paranteză) cu $l_{\Delta Z_{ij}}$, se obţine următoarea ecuaţie de corecţii:

$$dZ_j - dZ_i - l_{\Delta Z_{ij}} = v_{\Delta Z_{ij}}. \quad (6.113)$$

Scanned with OKEN Scanner

Evident, dacă unul din cele două puncte este de cotă fixă, corecţia dZ corespunzătoare va fi zero.

Notând cu $p_{\Delta Z}$ numărul punctelor de aerotriangulaţie între care s-au măsurat w diferenţe de nivel, setul complet de ecuaţii de corecţii poate fi exprimat matriceal sub forma:

$$\underset{(w,p_{\Delta Z})}{G_{\Delta Z}} \cdot \underset{(p_{\Delta Z},1)}{\ddot{\Delta}_{\Delta Z}} - \underset{(w,1)}{l_{\Delta Z}} = \underset{(w,1)}{V_{\Delta Z}} . \tag{6.114}$$

Dacă se consideră acum toate ecuaţiile observaţiilor geodezice: (6.92), (6.99), (6.104), (6.110) şi (6.114) şi se notează cu g numărul total al acestor ecuaţii ($g=d+t+u+s+w$), ele vor putea fi exprimate printr-o singură relaţie matriceală şi anume

$$\underset{(g,3n)}{G} \cdot \underset{(3n,1)}{\ddot{\Delta}} - \underset{(g,1)}{l_G} = \underset{(g,1)}{V_G} . \tag{6.115}$$

După cum se observă, din considerente de generalitate, s-a presupus că s-au efectuat măsurători geodezice în toate cele n puncte ale blocului de aerotriangulaţie, urmând ca în faza de calcul să se genereze ecuaţiile conform situaţiei concrete.

Pe de altă parte, ecuaţiile observaţiilor fotogrammetrice sunt date de relaţiile (6.58), (6.59) şi (6.60) deduse în paragraful precedent, reprezentând respectiv ecuaţiile condiţiei de coliniaritate, ecuaţiile punctelor de reper (care nu sunt considerate fixe) şi ecuaţiile parametrilor de orientare (pentru care se cunosc valori măsurate).

Pentru a obţine **modelul matematic complet al compensării**, acestor ecuaţii li se va adăuga setul de relaţii (6.115):

$$\begin{cases} \dot{B}\,\dot{\Delta} + \ddot{B}\,\ddot{\Delta} - l = V \\ \qquad\quad \ddot{\Delta} - l' = V' \\ \dot{\Delta} \qquad\quad - l'' = V'' \\ \quad G\,\ddot{\Delta} - l_G = V_G \end{cases}$$

Dacă se notează

$$\overline{B}=\begin{pmatrix}\dot{B} & \ddot{B}\\ O & I\\ I & O\\ O & G\end{pmatrix},\quad \Delta=\begin{pmatrix}\dot{\Delta}\\ \ddot{\Delta}\end{pmatrix},\quad \overline{l}=\begin{pmatrix}l\\ l'\\ l''\\ l_G\end{pmatrix},\quad \overline{V}=\begin{pmatrix}V\\ V'\\ V''\\ V_G\end{pmatrix},$$

sistemul precedent poate fi exprimat printr-o ecuaţie matriceală de forma (6.61):

$$\overline{B}\,\Delta-\overline{l}=\overline{V}\ ,$$

ca şi în cazul compensării cu fascicule fotogrammetrice. Prin urmare, sistemul de ecuaţii normale va putea fi reprezentat (ca şi în cazul menţionat) prin relaţia (6.62):

$$\left(\overline{B}^{\mathrm{T}}\overline{P}\overline{B}\right)\Delta=\overline{B}^{\mathrm{T}}\overline{P}\overline{l}\ ,$$

unde matricea ponderilor $\overline{P}$ va trebui completată cu ponderile măsurătorilor geodezice P_G:

$$\overline{P}=\begin{pmatrix}P & & & \\ & P' & & \\ & & P'' & \\ & & & P_G\end{pmatrix}.$$

De asemenea, separând parametrii de orientare de coordonatele-teren necunoscute, sistemul ecuaţiilor normale se poate scrie sub forma (6.73), unde vor trebui însă făcute unele observaţii privind matricea $\ddot{N}$. Această matrice va avea acum două componente: una fotogrammetrică $\ddot{N}_F$ şi una geodezică $\ddot{N}_G$ (ca de altfel şi termenul liber $\ddot{L}$), iar structura ei va avea diverse forme ilustrate în figura 6.23, potrivit următoarelor situaţii: **a)** numai observaţii fotogrammetrice, **b)** numerotare arbitrară a punctelor cu observaţii geodezice, **c)** observaţii geodezice pe întindere limitată, **d)** numerotare separată a punctelor în care s-au efectuat măsurători geodezice.

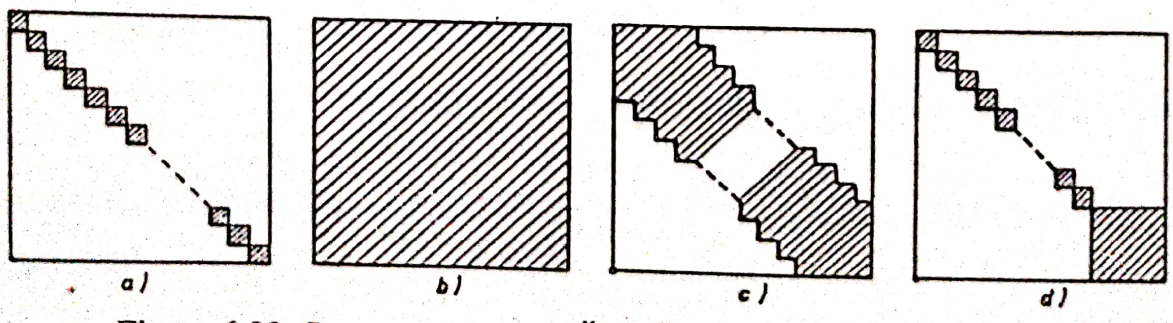

Figura 6.23. Structura matricei $\ddot{N}=\ddot{N}_F+\ddot{N}_G$ în diferite situaţii.

Scanned with OKEN Scanner

Primul caz (a) este cel tratat în paragraful anterior (fără observaţii geodezice) când inversarea matricei $\ddot{N}$ se reduce la inversarea unei succesiuni de submatrice de dimensiuni 3×3, deoarece în tratarea fotogrammetrică toate punctele din teren se consideră necorelate. Observaţiile geodezice efectuate între diferitele puncte (de aerotriangulaţie) din teren fac ca în cazul unei numerotări arbitrare a acestor puncte (b) matricea $\ddot{N}$ să fie o matrice completă de dimensiuni $3n \times 3n$, a cărei inversare va reprezenta o problemă serioasă pentru blocurile mari. Pentru a depăşi această problemă se poate proceda în două moduri şi anume: punând condiţia ca punctele între care se execută măsurători geodezice să nu fie prea depărtate sau, numerotând separat punctele în care s-au efectuat numai observaţii fotogrammetrice şi apoi punctele în care s-au executat şi observaţii geodezice. În prima situaţie, structura matricei $\ddot{N}$ va fi de tip bandă (fig.6.23.c), care evident se va inversa mai uşor decât o matrice completă, iar în cea de a doua, cea mai mare submatrice care va trebui inversată va avea dimensiunile $3n_g \times 3n_g$, unde n_g este numărul total al punctelor în care s-au efectuat observaţii geodezice.

Având în vedere faptul că numărul ecuaţiilor de corecţii privind observaţiile geodezice este mult mai mic decât numărul ecuaţiilor provenind din observaţiile fotogrammetrice, o rezolvare eficientă (dezvoltată în [27]) constă în compensarea aerotriangulaţiei ignorând la început măsurătorile geodezice şi corectând apoi soluţiile obţinute cu contribuţiile rezultate din observaţiile geodezice. Se profita astfel de structura regulată a matricei coeficienţilor ecuaţiilor normale în cazul compensării fotogrammetrice şi se rezolvă problema într-o primă etapă, după modul descris în paragraful anterior.

Pe de altă parte, se poate remarca faptul că prin adăugarea unui număr de g ecuaţii de corecţii, se modifică doar o mică porţiune a matricei coeficienţilor ecuaţiilor normale şi prin urmare ordinul submatricei ce va trebui inversată va fi mult mai mic decât ordinul întregii matrice.

În sfârşit, trebuie precizat că în faza de compensare se utilizează doar punctele necesare formării blocului. Coordonatele-teren ale celorlalte puncte ce interesează şi ale căror imagini apar pe două sau mai multe fotograme se obţin ulterior prin **intersecţie spaţială**, pe baza parametrilor de orientare determinaţi în prima fază. Pe această cale se pot calcula coordonatele-teren pentru un număr nelimitat de puncte.

6.4.2. UTILIZAREA GPS ÎN AEROTRIANGULAŢIE

După cum s-a menţionat în paragraful 1.2.3, determinarea **elementelor de orientare exterioară** reprezintă o problemă fundamentală în aerofotogrammetrie. Ea se rezolvă de obicei în mod indirect, cu ajutorul unui anumit număr de puncte

Scanned with OKEN Scanner

de sprijin (de reper) din teren dispuse într-un anumit mod şi ale căror imagini se pot identifica precis pe fotograme. În paragraful 6.1 se arată că numărul acestor puncte poate fi redus substanţial prin aerotriangulaţie, dar asigurarea unei precizii corespunzătoare face ca numărul punctelor determinate în teren să rămână totuşi destul de mare (după cum se va vedea în paragraful 6.3.5). De asemenea, obţinerea coordonatelor acestor puncte prin metode clasice conduce la scăderea considerabilă a randamentului exploatării fotogrammetrice.

Pe de altă parte, determinarea directă a elementelor de orientare exterioară cu ajutorul unor dispozitive speciale (statoscop, camera orizont etc.) nu a dus la rezultate satisfăcătoare pentru cazurile curente de exploatare fotogrammetrică, aşa-numitele **date auxiliare** neputând asigura precizia cerută.

Dezvoltarea rapidă a tehnicii din ultima perioadă a creat însă posibilităţi noi pentru rezolvarea acestor probleme, îndeosebi prin utilizarea **GPS** (Global Positioning System).

Astfel, coordonatele-teren ale punctelor de sprijin pot fi determinate cu ajutorul GPS prin metode de poziţionare statică. Trebuie avut în vedere însă că va fi necesară transformarea coordonatelor din sistemul spaţial geocentric WGS 84 (în care se obţin cu receptoarele GPS) în sistemul local (corespunzător aplicaţiei respective). Această problemă poate fi rezolvată (în bună parte) pe baza formulelor transformării conforme spaţiale. În acest scop, vor trebui cunoscute coordonatele în cele două sisteme pentru un anumit număr de puncte (care pot fi distincte de punctele de sprijin fotogrammetrice).

În ceea ce priveşte determinarea directă a elementelor de orientare exterioară, GPS permite obţinerea cu o precizie acceptabilă a coordonatelor centrelor de perspectivă (X_o^k, Y_o^k, Z_o^k). Cunoscând coordonatele centrelor de perspectivă poate fi redus la minim numărul punctelor de sprijin (rămânând de exemplu doar cele din colţurile blocului). O explicaţie simplă ar fi că în acest caz centrele de perspectivă vor avea acelaşi rol ca şi punctele de sprijin din teren.

Spre deosebire de determinarea statică a punctelor de sprijin, pentru a obţine coordonatele centrelor de perspectivă (în timpul deplasării avionului) se folosesc metode de poziţionare cinematică. Acestea (ca şi metodele de poziţionare statică) pot fi absolute şi relative, ultimele asigurând însă o precizie mai bună. În consecinţă, se va utiliza poziţionarea cinematică relativă care permite determinarea coordonatelor cu o precizie de câţiva centimetri, suficientă pentru exploatarea la scări mari.

În acest scop, se utilizează două receptoare GPS (fig.6.24): unul plasat într-o poziţie cunoscută la sol (în zona de aerofotografiere) şi altul pe avion. De asemenea, este necesară recepţionarea simultană a cel puţin 4 sateliţi într-o poziţie geometrică favorabilă. Această condiţie nu este întotdeauna îndeplinită în actuala configuraţie a sistemului GPS/NAVSTAR. Astfel, intervalul de timp în care se pot

Scanned with OKEN Scanner

executa măsurătorile în condiţii corespunzătoare este limitat, în unele zone nedepăşind o oră - două pe zi.

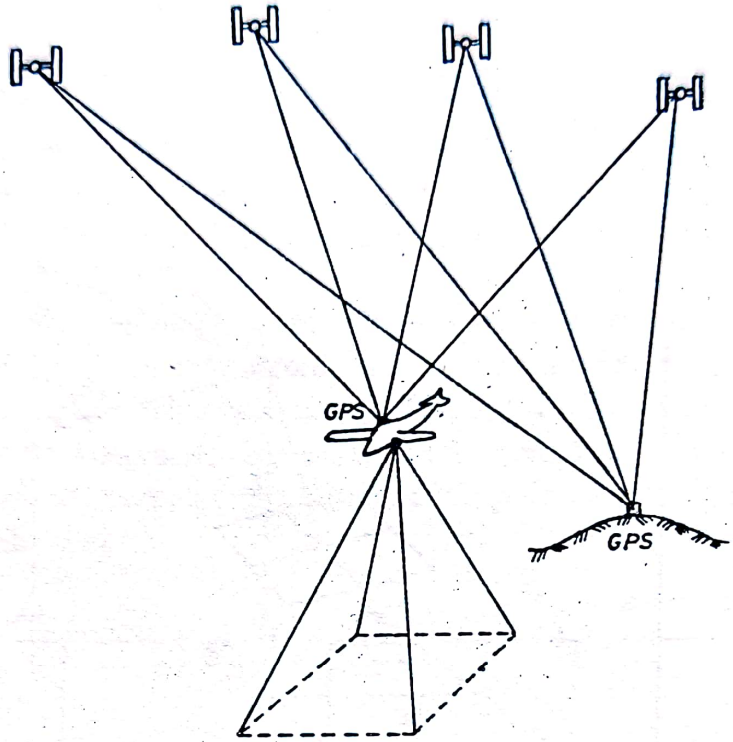

Figura 6.24. Poziţionarea cinematică relativă GPS.

Pe de altă parte, pentru a se obţine precizia menţionată trebuie să se aibă în vedere o serie de elemente, cum ar fi **discordanţa spaţială** determinată de excentricitatea antenei GPS faţă de centrul de perspectivă, **discordanţa în timp** dintre observaţiile GPS şi expunerile fotografice etc.

Referitor la **discordanţa spaţială**, trebuie precizat că aceasta se consideră în sistemul de coordonate-teren (fig.6.25) şi prin urmare va fi influenţată de rotaţia camerei fotogrammetrice în raport cu avionul şi de poziţia avionului faţă de teren.

Pentru a afla discordanţa spaţială va trebui determinată mai întâi excentricitatea $O'A$ şi raportată la sistemul de coordonate-imagine $O'xyz$. În acest scop se poate utiliza de exemplu o metodă bazată pe fotogrametria terestră, permiţând obţinerea unei precizii de 1 cm. O precizie mai bună (de 1-2 mm) se poate obţine însă pe cale topografică prin intersecţie înainte din câteva puncte situate în apropierea avionului. Evident, toate aceste măsurători se execută la sol.

Presupunând că excentricitatea nu se modifică în timpul zborului (deşi în acest timp avionul nu se comportă întru totul ca un corp rigid) şi considerând camera fixă în avion pe parcursul aerofotografierii, discordanţa spaţială se poate exprima prin relaţiile:

$$\begin{pmatrix} \Delta X_o \\ \Delta Y_o \\ \Delta Z_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_A - X_o \\ Y_A - Y_o \\ Z_A - Z_o \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}, \qquad (6.116)$$

unde R este matricea de rotaţie a sistemului fotogramei $(O'xyz)$ în raport cu sistemul de coordonate-teren.

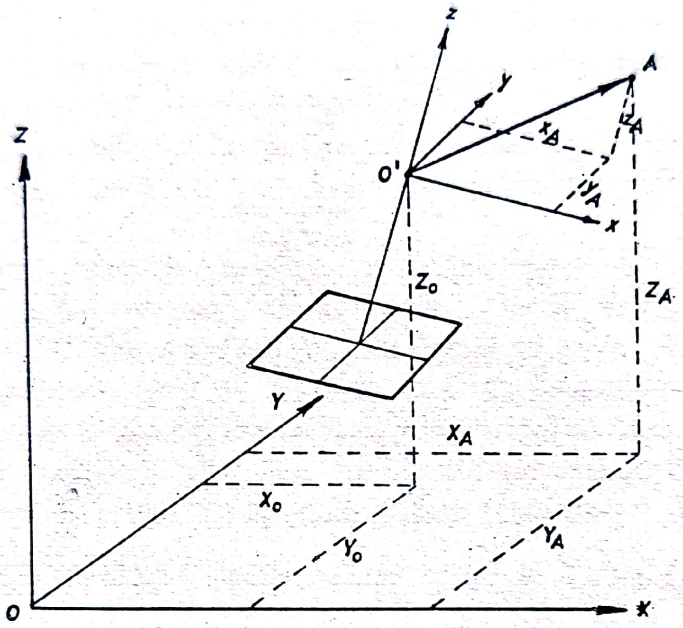

Figura 6.25. Discordanţa spaţială.

Totuşi, camera nu este fixă în avion, unghiul de derivă diferind pe traseele succesive ale benzilor. Pentru a putea lua în consideraţie însă acest unghi, el va trebui înregistrat fie manual, fie automat. De această rotaţie va trebui să se ţină seama, corectând corespunzător componentele excentricităţii înainte de a exprima discordanţa spaţială prin formula (6.116).

Trebuie remarcat că toate aceste determinări vor fi incluse în compensare în bloc cu fascicule fotogrammetrice (de ex.), pe baza primelor 3 relaţii (6.55):

$$\begin{pmatrix} dX_o \\ dY_o \\ dZ_o \end{pmatrix}^k - \begin{pmatrix} X_o^{GPS} \\ Y_o^{GPS} \\ Z_o^{GPS} \end{pmatrix}^k + \begin{pmatrix} X_o^o \\ Y_o^o \\ Z_o^o \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} v_{X_o} \\ v_{Y_o} \\ v_{Z_o} \end{pmatrix}^k. \qquad (6.117)$$

Având în vedere că de fapt se măsoară coordonatele antenei A şi neglijând eroarea de determinare a excentricităţii $O'A$, relaţiile (6.117) devin:

$$\begin{pmatrix} dX_o \\ dY_o \\ dZ_o \end{pmatrix}^k - \begin{pmatrix} X_A^{GPS} \\ Y_A^{GPS} \\ Z_A^{GPS} \end{pmatrix}^k + \begin{pmatrix} \Delta X_o \\ \Delta Y_o \\ \Delta Z_o \end{pmatrix}^k + \begin{pmatrix} X_o^o \\ Y_o^o \\ Z_o^o \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} v_{X_o} \\ v_{Y_o} \\ v_{Z_o} \end{pmatrix}^k , \quad (6.118)$$

unde ΔX_o, ΔY_o, ΔZ_o sunt componentele discordanţei spaţiale, date de formulele (6.116). După cum se arată în paragraful 6.3.3, aceste relaţii vor trebui normalizate prin împărţire cu H, obţinând ecuaţii de corecţii de forma (6.56). Prelucrările ulterioare vor urma modelul descris în paragraful menţionat. Trebuie precizat însă, că măsurătorile GPS pot fi incluse în mod similar şi în compensarea în bloc cu modele independente.

Pe de altă parte, după cum s-a menţionat anterior, trebuie avută în vedere şi **discordanţa în timp** dintre măsurătorile GPS şi expunerile fotografice. Această discordanţă (reprezentată schematic în figura 6.26) apare deoarece observaţiile GPS se execută la un interval de timp constant (de exemplu o dată pe secundă), pe când expunerile se fac la un alt interval (numit "timp de aşteptare") şi care nu este în general constant.

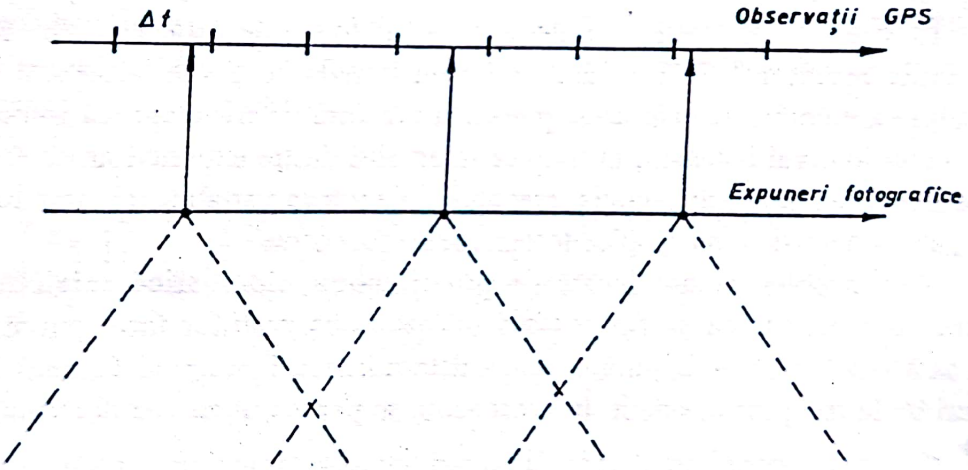

Figura 6.26. Discordanţa în timp.

Pentru rezolvarea acestei probleme ar fi în principiu 3 variante, dintre care va trebui aleasă soluţia:

1) măsurătorile GPS să se execute la primirea unor impulsuri de la camera fotoaeriană, în momentele în care se fac expuneri;

2) poziţia corespunzătoare fiecărei expuneri să se determine prin interpolare în raport cu poziţiile GPS cele mai apropiate;

3) expunerea să se facă la primirea unui impuls de la receptorul GPS.

Scanned with OKEN Scanner

Trebuie menţionat de la început că prima metodă nu poate fi aplicată deoarece nu există receptor GPS care să poată executa măsurători la orice interval. Valoarea Δt a intervalului poate fi cuprinsă între 1/4 s. şi 1 s. şi va fi pe toată durata zborului, constantă. De asemenea, în cazul primei metode ar fi dificil să se obţină observaţii simultane de la cele două receptoare GPS.

Pentru cea de-a doua metodă este necesar ca fiecare expunere să poată fi înregistrată precis, în intervalul de timp corespunzător celor două determinări GPS apropiate. Acest lucru este posibil utilizând camere moderne cum ar fi Wild RC 20, ce poate emite impulsuri cu o abatere maximă de ± 52 μs faţă de timpul mediu de expunere, reprezentând (la viteza de 100 m/s) o eroare în poziţie de aproximativ 5 mm (evident neglijabilă). Acest impuls va fi înregistrat de receptorul GPS în intervalul corespunzător expunerii respective. Referitor la interpolare, trebuie remarcat faptul că traseul avionului nu este strict liniar, iar în recepţionările GPS pot apare unele deficienţe. Din punct de vedere matematic, pentru interpolare se pot utiliza diferite procedee (polinomiale, spline etc.). Pentru o mai bună precizie a rezultatului este preferabil ca expunerea să se facă pe cât posibil mai aproape de o înregistrare GPS.

În ceea ce priveşte cea de a treia metodă, aceasta este de asemenea aplicabilă, receptorul GPS putând emite un impuls ce poate fi utilizat pentru a declanşa expunerea. Totuşi, acest procedeu prezintă dezavantajul că impulsul este emis la un interval constant, în timp ce intervalul dintre expuneri ar putea necesita variaţii în funcţie de accidentaţia terenului şi de viteza variabilă a avionului, pentru a asigura acoperiri stereoscopice fotogramelor succesive.

Alte probleme sunt legate de **poziţionarea cinematică relativă.** Astfel, pentru ca poziţionarea să fie posibilă pe baza observaţiilor fazei purtătoare este necesară rezolvarea ambiguităţii, adică determinarea numărului (întreg) iniţial de cicluri de la receptor la satelit. În acest scop, se poate utiliza una din următoarele 3 metode:

1) iniţializarea statică pe baza unui vector cunoscut înainte de zbor;
2) determinarea statică a vectorului de la staţia de referinţă la antena montată pe avion;
3) determinarea ambiguităţii în timp ce avionul se află în zbor.

Pentru aplicarea primei metode, avionul va trebui plasat într-o poziţie bine determinată şi prin urmare se va putea cunoaşte vectorul de la receptorul de referinţă la avion şi pe această bază se va putea rezolva ambiguitatea destul de uşor.

Cea de a doua metodă se bazează pe determinarea statică prin mijloace clasice a vectorului de la staţia de referinţă la avion. Durata observaţiilor va putea

Scanned with OKEN Scanner

însă varia între 5 minute şi două ore în funcţie de lungimea vectorului, tipul receptorului etc.

Aceste prime două metode prezintă însă dezavantajul că înregistrările GPS trebuie să înceapă la aeroport, mai ales dacă zona de aerofotografiere este departe. De asemenea, aceste metode sunt vulnerabile la "alunecări" de ciclu sau la întreruperi de semnal.

Aceste inconveniente ar putea fi evitate prin a treia metodă, determinând ambiguitatea în timpul zborului. În acest caz sunt necesare însă 10-15 minute de măsurători continue, iar mulţi din algoritmii propuşi pentru rezolvarea acestei probleme cer informaţii adiţionale.

Pe de altă parte, există riscul ca soluţia ambiguităţii să fie greşită, sau să apară alunecări de ciclu imposibil de corectat (de exemplu când ramân mai puţin de 4 sateliţi de la care se primesc semnale). În plus, aceste erori sunt uneori dificil de detectat.

În consecinţă vor apare "abateri" ale coordonatelor determinate (faţă de cele reale), care se manifestă aproximativ liniar într-un interval limitat de timp (10-15 minute). Aceste erori sistematice se pot reprezenta prin 6 parametri: 3 translaţii (independente de timp) a_X, a_Y, a_Z pentru fiecare bandă k' şi 3 translaţii dependente de timp b_X, b_Y, b_Z proprii de asemenea fiecărei benzi k'. Determinarea lor se poate face în cadrul compensării în bloc, adaugând ecuaţiilor (6.118) termenii corespunzători:

$$\begin{pmatrix} dX_o \\ dY_o \\ dZ_o \end{pmatrix}^k + \begin{pmatrix} a_X \\ a_Y \\ a_Z \end{pmatrix}^{k'} + \Delta t^k \begin{pmatrix} b_X \\ b_Y \\ b_Z \end{pmatrix}^{k'} - \begin{pmatrix} X_A^{GPS} \\ Y_A^{GPS} \\ Z_A^{GPS} \end{pmatrix}^k + \begin{pmatrix} \Delta X_o \\ \Delta Y_o \\ \Delta Z_o \end{pmatrix}^k + \begin{pmatrix} X_o^o \\ Y_o^o \\ Z_o^o \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} v_{X_o} \\ v_{Y_o} \\ v_{Z_o} \end{pmatrix}^k \tag{6.119}$$

unde Δt^k este timpul scurs de la începutul benzii k' până la preluarea fotogramei k.

Trebuie precizat că cei 6 parametri nou introduşi se consideră proprii fiecărei benzi, deoarece alunecările de ciclu apar de obicei când avionul efectuează buclele de întoarcere de la o bandă la alta. Desigur, în cazul în care se pot corecta toate alunecările de ciclu între benzi, va fi suficient să se considere 6 parametri pentru întregul bloc.

Pe de altă parte, trebuie menţionat că estimarea acestor parametri în cadrul compensării în bloc va slăbi geometria blocului. În consecinţă, pentru asigurarea unei precizii bune, va trebui ca pe lângă un minim necesar de puncte de sprijin (de exemplu cele din colţurile blocului) să se determine în teren puncte suplimentare, dispuse în anumite configuraţii (analizate în [7]).

Totuşi, includerea parametrilor de abatere în compensarea în bloc uşurează activităţile din timpul aerofotografierii, alunecările de ciclu între benzi

Scanned with OKEN Scanner

nemaicreând probleme. De asemenea, nu va mai fi necesară determinarea ambiguităţii la sol, fiind suficientă o valoare aproximativă obţinută înainte de prima expunere.

În sfârşit, trebuie remarcată necesitatea transformării coordonatelor antenei GPS din sistemul spaţial WGS 84 în sistemul local (ca şi în cazul coordonatelor-teren ale punctelor de sprijin determinate cu ajutorul GPS). Dacă deviaţia de la verticală poate fi considerată constantă în zona blocului fotogrammetric, se poate utiliza transformarea conformă spaţială (A.37) pe baza unor puncte cu coordonate cunoscute în ambele sisteme (de preferinţă situate în colţurile blocului). Includerea parametrilor acestei transformări în compensarea în bloc nu este însă recomandabilă, datorită puternicei corelaţii dintre aceştia şi parametrii de abatere.

6.4.3. COMPENSAREA AEROTRIANGULAŢIEI ÎN CAZUL TERENURILOR PLANE

Deşi metodele de compensare spaţială a aerotriangulaţiei prezentate anterior sunt aplicabile în general şi în cazul terenurilor aproximativ plane, în anumite situaţii este preferabil (sau chiar necesar) să se apeleze la metode specifice acestui caz. Astfel de situaţii apar de exemplu dacă terenul este greu accesibil şi este acoperit în mare parte de apă şi de vegetaţie. În consecinţă, pe unele fotograme nu vor mai putea fi alese puncte de aerotriangulaţie în poziţiile standard, sau vor apare chiar întreruperi stereofotogrammetrice.

Prin urmare, având în vedere că în acest caz nu este necesară exploatarea stereofotogrammetrică, blocul poate fi alcătuit din fotograme cu acoperiri longitudinale şi transversale simple (de aprox. 20-25%), după cum se arată în [31]. Conexiunea fotogramelor se realizează cu ajutorul a câte două puncte de legătură pe fiecare latură (plasate către colţurile fotogramelor), rezultând deci un număr mult mai mic de puncte de aerotriangulaţie. Referitor la punctele de sprijin, trebuie precizat că (pentru obţinerea unei precizii corespunzătoare) ele vor trebui dispuse pe întreg perimetrul blocului (deşi teoretic, ar fi suficient să fie plasate pe două laturi consecutive ale acestuia). Situaţia este similară cu cea prezentată în paragraful 6.3.2 şi reprezentată în figura 6.11 pentru un bloc cu modele independente.

Compensarea se execută pe baza ecuaţiilor condiţiei de coliniaritate sub forma liniarizată (3.27), sau - în cazul utilizării parametrilor directori - (3.35), sau (3.36) cu coeficienţi omogenizaţi numeric. Aceste ecuaţii vor trebui însă completate cu termenii corespunzători coordonatelor-teren necunoscute (X, Y), ca şi la compensarea în bloc cu fascicule (v.paragraful 6.3.3). Trebuie precizat

Scanned with OKEN Scanner

totodată că în acest caz Z se consideră constant şi deci $dZ = 0$. Prin urmare, ecuaţiile de corecţii rezultate (de ex.) din (3.36) vor fi:

$$\begin{cases} dX'_o - u\,dZ'_o + uv\,d\omega - \left(1+u^2\right)d\varphi + v\,d\kappa - dX' - \left(u'-u^o\right) = v_{u'} \\ dY'_o - v\,dZ'_o + \left(1+v^2\right)d\omega - uv\,d\varphi - u\,d\kappa - dY' - \left(v'-v^o\right) = v_{v'} \end{cases} \qquad (6.120)$$

În rest, compensarea (inclusiv determinarea valorilor aproximative) poate urma procedeul descris în paragraful 6.3.3. Se poate remarca de asemenea că structura matricei coeficienţilor ecuaţiilor normale reduse, păstrând aceeaşi formă generală, se va simplifica însă datorită acoperirilor longitudinale mai mici dintre fotograme.

O altă metodă presupune eliminarea de la început a coordonatelor necunoscute. Pentru aceasta se va utiliza forma liniarizată (3.18) a ecuaţiilor condiţiei de coliniaritate, adăugând însă în membrul stâng termenii corespunzători corecţiilor mărimilor măsurate (x', y', X, Y):

$$\begin{cases} H^o v_{x'} - f\,v_X + f\,dX_o + x'\,dZ_o + (X-X_o)^o y'\,d\omega - \left((X-X_o)^o x' - (Z-Z_o)^o f\right)d\varphi + \\ \qquad + (Z-Z_o)^o y'\,d\kappa - \left((X-X_o)^o f + (Z-Z_o)^o x'\right) = 0 \\ H^o v_{y'} - f\,v_Y + f\,dY_o + y'\,dZ_o + \left((Y-Y_o)^o y' - (Z-Z_o)^o f\right)d\omega - (Y-Y_o)^o x'\,d\varphi - \\ \qquad - (Z-Z_o)^o x'\,d\kappa - \left((Y-Y_o)^o f + (Z-Z_o)^o y'\right) = 0 \end{cases}$$

Introducând notaţiile specificate în paragraful 3.3 şi considerând coordonatele-teren ale punctelor de reper fără erori ($v_X = v_Y = 0$), aceste ecuaţii devin (după împărţirea cu f):

$$\begin{cases} \dfrac{H^o}{f} v_{x'} + dX_o + X_f^o\,dm + V^o\,d\omega - U^o\,d\varphi - Y_f^o\,d\kappa - \left(X - X_o^o - X_f^o\right) = 0 \\ \dfrac{H^o}{f} v_{y'} + dY_o + Y_f^o\,dm + W^o\,d\omega - V^o\,d\varphi + X_f^o\,d\kappa - \left(Y - Y_o^o - Y_f^o\right) = 0 \end{cases}.$$

Deoarece $H^o = m^o f$, rezultă că primul termen din fiecare ecuaţie reprezintă corecţia coordonatei-imagine corespunzătoare "proiectată" în teren. Trecând aceşti termeni în membrul drept şi notând

$$v_{X'} = -m^o v_{x'} \quad , \quad v_{Y'} = -m^o v_{y'}$$

se obţin următoarele ecuaţii de corecţii:

$$\begin{cases} dX_o + X_f^o\, dm + V^o d\omega - U^o d\varphi - Y_f^o\, d\kappa - \left(X - X_o^o - X_f^o\right) = v_{X'} \\ dY_o + Y_f^o\, dm + W^o d\omega - V^o d\varphi + X_f^o\, d\kappa - \left(Y - Y_o^o - Y_f^o\right) = v_{Y'} \end{cases} \tag{6.121}$$

Pentru a utiliza iterativ aceste relaţii, indicele superior " ^{o} " va trebui înlocuit cu " $^{i-1}$ " (*i* reprezentând numărul iteraţiei). Acest indice va fi ignorat însă în continuare, pentru a nu încărca notaţia.

În compensare, vor fi incluse două tipuri de ecuaţii de corecţii. Astfel, pentru fiecare reper *i* (notat ca indice inferior), a cărui imagine apare pe fotograma *k*, se pot scrie câte două ecuaţii de forma (6.121):

$$\begin{cases} dX_o^k + X_{f_i}^k dm^k + V_i^k\, d\omega^k - U_i^k\, d\varphi^k - Y_{f_i}^k\, d\kappa^k - \left(X_i^m - X_o^k - X_{f_i}^k\right) = v_{X'_i}^k \\ dY_o^k + Y_{f_i}^k\, dm^k + W_i^k\, d\omega^k - V_i^k\, d\varphi^k + X_{f_i}^k\, d\kappa^k - \left(Y_i^m - Y_o^k - Y_{f_i}^k\right) = v_{Y'_i}^k \end{cases} \tag{6.122}$$

indicele superior " ^{m} " făcând referire la mărimi măsurate.

Pe de altă parte, pentru fiecare punct de legătură *j* comun fotogramelor *k* şi *l*, se scriu câte două ecuaţii rezultate prin scăderea relaţiilor (6.121) particularizate pentru fotogramele vecine *k* şi *l*:

$$\begin{cases} dX_o^k + X_{f_j}^k\, dm^k + V_j^k\, d\omega^k - U_j^k\, d\varphi^k - Y_{f_j}^k\, d\kappa^k - dX_o^l - X_{f_j}^l\, dm^l - V_j^l\, d\omega^l + \\ \quad + U_j^l\, d\varphi^l + Y_{f_j}^l\, d\kappa^l - \left(X_o^l + X_{f_j}^l - X_o^k - X_{f_j}^k\right) = v_{X'_j}^k - v_{X'_j}^l \\ dY_o^k + Y_{f_j}^k\, dm^k + W_j^k\, d\omega^k - V_j^k\, d\varphi^k + X_{f_j}^k\, d\kappa^k - dY_o^l - Y_{f_j}^l\, dm^l - W_j^l\, d\omega^l + \\ \quad + V_j^l\, d\varphi^l - X_{f_j}^l\, d\kappa^l - \left(Y_o^l + Y_{f_j}^l - Y_o^k - Y_{f_j}^k\right) = v_{Y'_j}^k - v_{Y'_j}^l \end{cases} \tag{6.123}$$

Prin aceste scăderi, coordonatele-teren necunoscute X_j, Y_j au fost eliminate, dar în membrul drept apar diferenţe de corecţii. Deoarece acelaşi punct poate fi comun mai multor fotograme, unele corecţii $v_{X'_j}, v_{Y'_j}$ pot să apară în mai multe ecuaţii, care nu vor mai fi deci independente, ci corelate. În consecinţă, compensarea va trebui să urmeze procedeul descris în ultima parte a parag afului 6.3.2.a. În paragraful următor (6.3.2.b) este descris un mod de determinare a valorilor aproximative pe baza formulelor transformării conforme în plan, aplicabil şi aici.

În ceea ce priveşte procesul iterativ, ca şi la celelalte metode de compensare, corecţiile elementelor de orientare (proprii fiecărei fotograme) obţinute la o

anumită iteraţie i se aplică aproximaţiilor anterioare, conform specificului mărimilor respective:

$$\begin{aligned} X_o^i &= X_o^{i-1} + dX_o^i \ , \\ Y_o^i &= Y_o^{i-1} + dY_o^i \ , \\ m^i &= m^{i-1}\left(1+dm^i\right) \ , \end{aligned} \tag{6.124}$$

iar cu parametrii unghiulari $(d\omega^i, d\varphi^i, d\kappa^i)$ se formează matricea de rotaţie R^i, cu ajutorul căreia se corectează coordonatele fotogrammetrice X_f, Y_f pe baza relaţiilor (3.15):

$$\begin{cases} X_f^i = -H^i \dfrac{R_1 X_f^{i-1}}{R_3^i X_f^{i-1}} \\ Y_f^i = -H^i \dfrac{R_2^i X_f^{i-1}}{R_3^i X_f^{i-1}} \end{cases} \tag{6.125}$$

unde

$$H^i = m^i f \ , \quad R^i = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}^i \ , \quad X_f^{i-1} = \begin{pmatrix} X_f \\ Y_f \\ -H \end{pmatrix}^{i-1} .$$

Se vor putea calcula acum şi ceilalţi coeficienţi din ecuaţiile (6.123):

$$U^i = H^i\left(1+\left(\frac{X_f^i}{H^i}\right)^2\right), \quad V^i = \frac{\left(X_f^i Y_f^i\right)}{H^i}, \quad W^i = H^i\left(1+\left(\frac{Y_f^i}{H^i}\right)^2\right) \tag{6.126}$$

şi se va putea trece la iteraţia următoare. Iteraţiile vor continua până când corecţiile devin nesemnificative, adică:

$$|dX_o|, |dY_o| \le 0{,}1‰\, H; \quad |dm|, |d\omega|, |d\varphi|, |d\kappa| \le 10^{-5} \ .$$

Pentru a obţine coordonatele-teren, valorilor X_f^u, Y_f^u obţinute în ultima iteraţie (u) li se vor adăuga coordonatele corectate ale centrului de perspectivă corespunzător X_o^u, Y_o^u, precum şi coordonatele centrului de greutate X_G, Y_G (dacă s-a lucrat cu coordonate reduse).

În sfârşit, trebuie menţionat că procedeele prezentate aici se pot utiliza şi în cazul terenurilor accidentate, cu condiţia cunoaşterii cotelor punctelor, în care caz

Scanned with OKEN Scanner

va trebui aplicată coordonatelor-imagine corecţia de relief (v.paragraful 2.8) în cadrul prelucrării iniţiale a datelor.

6.4.4. AEROTRIANGULAŢIA PRIN METODA INCLUZIUNII

Specificul acestui procedeu constă în aerofotografierea la două scări: o scară mare (zborul "normal") în vederea restituţiei şi o scară mică în vederea aerotriangulaţiei, adică pentru determinarea fotogrammetrică a punctelor de sprijin necesare exploatării fotogramelor la scară mare. Aceasta se poate realiza (după cum se arată schematic în figura 6.27) pe două cai şi anume: preluând fotogramele de la înălţimi de zbor diferite, sau preluând fotogramele de la aceeaşi înălţime (în cadrul aceluiaşi zbor), dar cu două camere cu distanţe focale diferite.

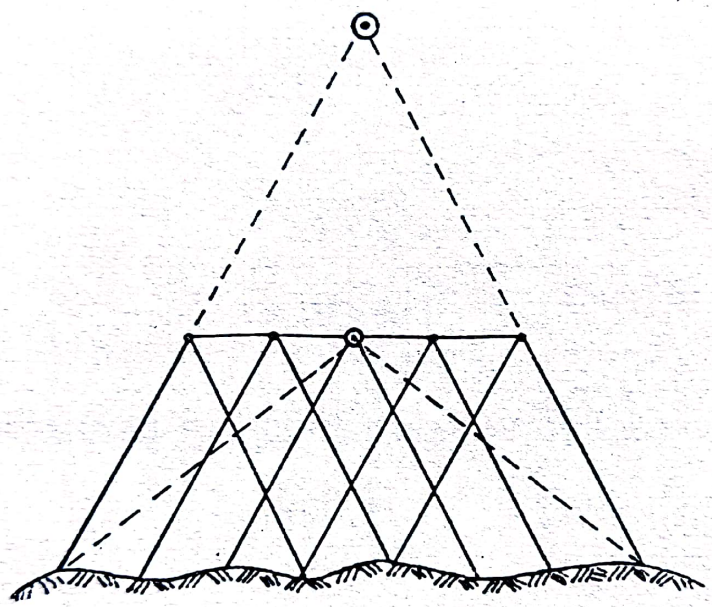

Figura 6.27. Aerofotografierea la două scări.

În cazul primei variante (numită "survol") fiind folosit acelaşi tip de cameră, un avantaj important constă în faptul că exploatarea se face în condiţii asemănătoare. Pot apărea însă unele dificultăţi în faza de pregătire provenind din dispunerea diferită a fotogramelor preluate în cele două zboruri. La cea de-a doua variantă, camerele sunt de tip diferit, dar axele lor optice sunt paralele şi relativ apropiate, permiţând o dispunere regulată a fotogramelor la scară mare în raport cu cele la scară mică. De asemenea, fiind preluate de la aceeaşi înălţime, fotogramele la cele două scări suferă aceleaşi influenţe exterioare (refracţie etc.).

O problemă importantă o constituie stabilirea raportului optim între scările celor două aerofotografieri. Trebuie amintit însă mai întâi că între scara planului şi

Scanned with OKEN Scanner

scara fotogramelor, pe baza cărora urmează să se întocmească acesta, există o relaţie: $m_f = C\sqrt{m_p}$ (unde constanta C poate lua valori într-un anumit interval), relaţie ce se poate reprezenta printr-o nomogramă (v.[25], vol.III, pag.153). De asemenea, deşi fotogramele la scară mică nu sunt utilizate pentru restituţia detaliilor, ele trebuie să permită totuşi identificarea şi transpunerea precisă a punctelor de aerotriangulaţie pe fotogramele la scară mare. Nu se poate stabili însă o formulă care să concretizeze relaţia optimă dintre aceste scări, o influenţă importantă având natura detaliilor din zona respectivă. Pentru exemplificare, se poate considera următoarea combinaţie de scări în vederea întocmirii unui plan restituit la 1:2.000 şi anume: aerofotografierea normală va trebui executată la o scară cuprinsă între 1:6.000 şi 1:8.000, iar "survolul" (de ex.) la o scară cuprinsă între 1:15.000 şi 1:20.000.

Pentru a prezenta principiul metodei, se va considera (pentru simplificare) o dispunere regulată a fotogramelor la scară mare în raport cu cele la scară mică. Deoarece procedeul se poate aplica atât în cazul terenurilor plane (când fotogramele se exploatează independent), cât şi în cazul terenurilor accidentate (implicând exploatarea stereofotogrammetrică), în continuare se va descrie (succesiv) modul în care se realizează aerotriangulaţia prin această metodă, în cele două situaţii.

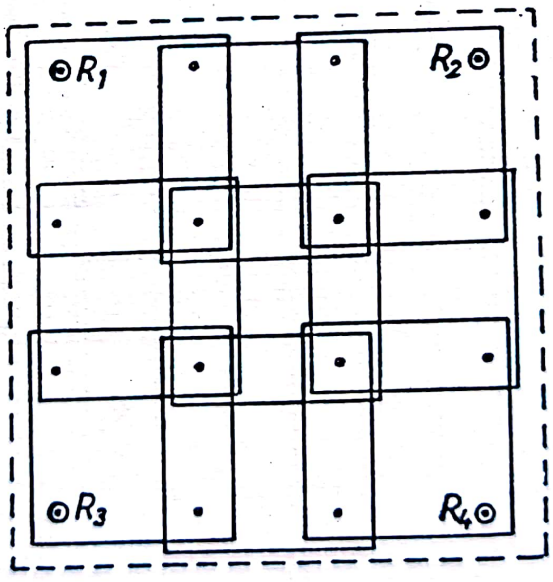

Figura 6.28. Metoda incluziunii în cazul terenurilor plane.

Pentru simplificare, se va considera o singură fotogramă la scară mică (marcată prin linii întrerupte în figura 6.28), ce cuprinde o porţiune din teren reprezentată pe 9 fotograme la scară mare (de ex.). După cum se ştie, pentru exploatarea independentă a acestor fotograme vor fi necesare câte 4 puncte de

sprijin, dispuse către colţurile fiecărei fotograme. Aceste puncte însă nu vor fi determinate în teren, ci cu ajutorul fotogramei la scară mică, pe care ele vor fi transpuse cât mai precis. Se vor măsura apoi coordonatele-imagine (x,y) ale tuturor punctelor pe fotograma la scară mică, utilizând un aparat de tip comparator.

Într-o primă etapă de calcul, se vor obţine cei 6 parametri de orientare ai fotogramei la scară mică prin procedeul descris la paragraful 3.4, pe baza celor 4 puncte de sprijin ale acestei fotograme. Apoi, cu ajutorul acestor parametri, se vor determina coordonatele-teren ale tuturor punctelor măsurate. Prin urmare, se va putea realiza acum exploatarea fiecărei fotograme la scară mare, pe baza acestor puncte. Trebuie precizat că cele 4 puncte de sprijin ale fotogramei la scară mică pot fi determinate în teren, sau pot fi obţinute prin aerotriangulaţie (în cazul unui număr mai mare de fotograme la scară mică, formând o bandă sau un bloc).

Dacă terenul este accidentat, procedeul descris se aplică asemănător, având însă în vedere că în această situaţie se exploatează perechi de fotograme, având acoperire stereoscopică. Trebuie amintit că pentru realizarea orientării absolute, fiecare stereomodel va trebui să aibă cel puţin 3 puncte de sprijin, în exemplificarea ce urmează considerându-se câte 4 astfel de puncte dispuse către colţurile fiecărui stereomodel (fig.6.29).

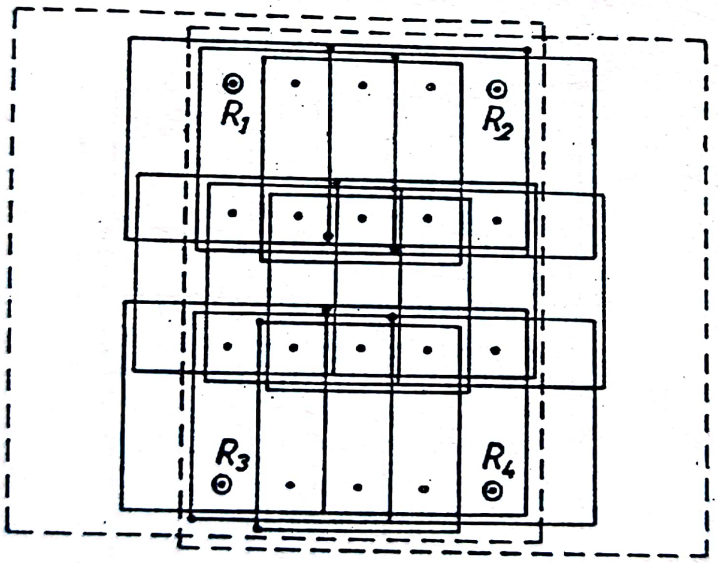

Figura 6.29. Metoda incluziunii în cazul terenurilor accidentate.

Ca şi în cazul anterior, se va considera (pentru simplificare) o singură stereogramă la scară mică (marcată prin linii întrerupte în figura 6.29) ce cuprinde (în zona de acoperire stereoscopică) o porţiune din teren corespunzătoare unui anumit număr de stereograme la scară mare. Punctele de sprijin necesare

Scanned with OKEN Scanner

exploatării acestor stereograme vor fi transpuse şi măsurate pe fotogramele la scară mică.

După orientarea relativă a celor două fotograme la scară mică, se realizează orientarea absolută a stereomodelului obţinut, utilizând punctele de sprijin din colţurile acestuia. Cei 7 parametri de orientare absolută (determinaţi prin procedeul descris în paragrafele 4.3.2 şi 4.3.3) vor permite calculul coordonatelor-teren ale tuturor punctelor măsurate (după cum se arată în paragraful 4.3.4). Cu ajutorul acestora, se va putea realiza acum exploatarea stereogramelor la scară mare. În ceea ce priveşte natura punctelor de sprijin ale stereogramei la scară mică, sunt valabile observaţiile prezentate la cazul anterior.

De asemenea, trebuie menţionat că de obicei fotogramele la scară mică formează la rândul lor benzi sau blocuri de aerotriangulaţie, care sunt tratate separat printr-una din metodele prezentate anterior. Prin urmare, pentru o aplicare riguroasă a metodei incluziunii, va trebui să se ţină seama de natura punctelor de sprijin utilizate.

Pe de altă parte, trebuie subliniat faptul că o importanţă deosebită în asigurarea unei precizii corespunzătoare la aplicarea acestei metode o are alegerea şi transpunerea punctelor, prezentând serioase dificultăţi datorită dimensiunilor (şi chiar formelor) diferite ale detaliilor la cele două scări. Desigur, punctele premarcate în teren pot elimina unele din aceste dificultăţi, dar este extrem de greu să se asigure dispunerea corespunzătoare a imaginilor acestor puncte pe fotograme.

În sfârşit, se poate remarca randamentul deosebit al acestei metode, permiţând exploatarea fotogramelor la scări mari, pe baza unor aerofotografieri anterioare la scări mici, prelucrate deja fotogrammetric.

6.5. Precizia aerotriangulaţiei

În principiu (după cum se arată în [18], pg.261), reducerea numărului de puncte de sprijin determinate în teren şi completarea acestora prin aerotriangulaţie (în laborator) conduce la micşorarea preciziei exploatării fotogrammetrice. Totuşi, dacă se va ţine seama de factorii care influenţează precizia aerotriangulaţiei şi de modul în care poate fi îmbunătăţita această precizie, se vor putea obţine rezultate foarte bune (chiar şi în cazul exploatării la scări mari).

Principalii factori de care depinde precizia aerotriangulaţiei sunt:

- calitatea metrică şi fotografică a fotogramelor;
- precizia de marcare şi transpunere a punctelor;
- precizia de identificare a imaginilor punctelor de reper;

Scanned with OKEN Scanner

- numărul şi dispunerea punctelor de sprijin (de reper);
- precizia de determinare a punctelor de sprijin în teren;
- precizia de măsurare a elementelor de bază ale compensării;
- modul de detectare a greşelilor şi a erorilor şi de corectare a acestora;
- metoda de aerotriangulaţie utilizată.

Referitor la primul factor, un rol important îl are camera fotogrammetrică utilizată, care trebuie să asigure o rezoluţie cât mai bună a imaginii. De asemenea, pentru o mai fidelă corectare a coordonatelor-imagine, camera ar trebui să fie prevazută cu 8 indici de referinţă, iar când aceştia sunt în număr de 4, este preferabil ca ei să fie situaţi la colţuri.

În ceea ce priveşte precizia de marcare şi de transpunere a punctelor, aceasta poate fi asigurată (la nivel corespunzător) numai dacă se utilizează dispozitive speciale destinate acestui scop (ce vor fi descrise în paragraful 7.1). Pentru o bună punctare, este de dorit ca marca de măsurare să fie ceva mai mică decât punctul marcat. În cazul observării stereoscopice, punctele pot fi marcate pe o singură fotogramă. Punctele care asigură legătura transversală vor trebui însă marcate pe ambele benzi.

Un alt factor se referă la identificarea imaginilor punctelor de sprijin. În acest sens, trebuie precizat că o bună identificare o oferă punctele premarcate în teren. Totuşi, utilizarea unor astfel de puncte este limitată de o serie de aspecte practice. Important este însă ca detaliile (naturale sau artificiale) alese ca puncte de sprijin să corespundă cerinţelor unei corecte identificări (referitoare la formă, dimensiuni, înălţime, contrast faţă de elementele înconjurătoare etc.).

Numărul şi dispunerea punctelor de sprijin reprezintă o problemă deosebit de importantă în asigurarea unei bune precizii. Rezolvarea acestei probleme este specifică modului în care se realizează aerotriangulaţia. Astfel, în cazul aerotriangulaţiei pe benzi, precizia depinde de distanţa dintre perechile de puncte de sprijin (v.fig.6.9). Studiile efectuate de Schmid (1961) - menţionate în [2] - recomandă ca această distanţă să fie de 6-7 modele. Prin urmare, nu lungimea benzii este determinantă în acest sens, ci respectarea distanţei optime dintre punctele de sprijin.

În cazul compensării în bloc a aerotriangulaţiei, studiile efectuate în primul rând de Ackermann (v.[1]) şi dezvoltate de Ebner, Jerie ş.a. au evidenţiat câteva importante concluzii privind punctele de sprijin planimetrice şi altimetrice.

Referitor la **punctele de sprijin planimetrice**, se pot preciza următoarele:

a - Dacă punctele de reper sunt situate numai la colţurile blocului, rezultatele sunt nesatisfăcătoare şi anume cu atât mai mult cu cât dimensiunile blocului sunt mai mari.

b - În cazul punctelor de sprijin dispuse rar pe perimetrul blocului, erorile sunt mai mari la marginile blocului între aceste puncte; deoarece partea centrală a

Scanned with OKEN Scanner

blocului este stabilă din acest punct de vedere, un reper suplimentar în centru ar îmbunătăţi numai puţin şi local precizia.

c - Dacă punctele de reper sunt situate pe întreg perimetrul (cel puţin un punct la două baze), precizia obţinută este foarte bună (erorile medii pătratice ale coordonatelor fiind de acelaşi ordin de mărime cu eroarea medie pătratică a unităţii de pondere); de asemenea, precizia este omogenă şi este practic independentă de mărimea şi forma blocului.

d - Având în vedere şi aspectul economic, **se recomandă** ca punctele planimetrice de sprijin să fie dispuse la distanţe de 5 baze pe laturile blocul : paralele cu direcţia benzilor şi la distanţe de 4 baze pe laturile transversale (adică, din două în două benzi), aceasta asigurând de asemenea o bună precizie rezultatelor compensării.

În ceea ce priveşte **dispunerea punctelor altimetrice de sprijin,** se pot face următoarele menţiuni:

a - Teoretic, fiecare bandă trebuie să aibă cel puţin 3 puncte cu cote cunoscute (pentru orizontalizare) dar practic, pentru a i se putea controla deformarea, vor fi necesare minimum câte două puncte la capetele benzii şi un punct la mijlocul acesteia.

b - Dispunerea standard a punctelor de reper altimetrice este în şiruri transversale blocului (câte un punct în fiecare acoperire transversală pe direcţia respectivă), precizia depinzând în principal de distanţa dintre aceste şiruri (şi fiind deci practic independentă de lungimea benzii).

c - Dacă distanţa dintre şirurile de puncte de sprijin este de 5 baze, atunci precizia cotelor compensate va fi foarte bună (corespunzând erorii medii pătratice a unităţii de pondere σ_o).

d - În cazul unor distanţe mai mari între şirurile de puncte de reper, erorile maxime vor apare pe cele două laturi longitudinale ale blocului şi precizia va putea fi îmbunătăţită (local) cu ajutorul unor puncte de sprijin suplimentare, pe aceste laturi. Totuşi precizia părţii centrale a blocului nu va fi semnificativ îmbunătăţită, erorile maxime apărând acum în această zonă între şirurile de puncte de reper.

Un alt factor ce influenţează precizia aerotriangulaţiei se referă la determinarea punctelor de sprijin în teren. În cazul exploatării la scări medii şi mici, precizia cu care se obţin coordonatele acestor puncte este superioară preciziei fotogrammetrice şi de aceea majoritatea metodelor "clasice" consideră coordonatele-teren ale punctelor de reper lipsite de erori. Pentru exploatarea la scări mari, această ipoteză nu mai poate fi luată însă în consideraţie, iar coordonatele-teren ale punctelor de sprijin vor trebui avute în vedere în compensare, ca mărimi măsurate obţinute cu anumite precizii şi având deci anumite ponderi. În consecinţă, o prelucrare riguroasă nu poate face abstracţie de

Scanned with OKEN Scanner

aceste aspecte, determinante în ceea ce priveşte precizia rezultatelor finale ale compensării.

Pe de altă parte, o problemă importantă o constituie precizia elementelor de bază ale compensării. Astfel, când elementele de bază se obţin prin măsurare la un aparat de tip comparator se poate considera $|\sigma_o| = (0{,}005\text{-}0{,}01)$mm, iar când acestea se determină la un aparat analogic de stereorestituţie de mare precizie, eroarea medie pătratică de măsurare a elementelor de bază va fi $|\sigma_o| = (0{,}01\text{-}0{,}015)$mm. Se pune însă problema în ce măsură eroarea medie pătratică a unităţii de pondere obţinută la compensarea în bloc este în concordanţă cu eroarea medie pătratică de măsurare a elementelor de bază. De asemenea, este important să se asigure o precizie omogenă elementelor de bază.

La asigurarea unei astfel de precizii omogene intervine un alt factor şi anume posibilitatea verificării măsurătorilor, adică posibilitatea detectării greşelilor şi a erorilor şi eliminarea influenţei acestora. În acest sens, orice program de rezolvare practică a aerotriangulaţiei trebuie să conţină un sistem eficient de verificare a datelor. Un astfel de sistem (depinzând de tipul măsurătorilor şi de modul de compensare) va fi prezentat în paragraful 7.3. Trebuie precizat însă că pentru o verificare eficientă a datelor este recomandabil ca înaintea compensării în bloc, să se formeze benzile de aerotriangulaţie, să se aducă într-un sistem comun (cel al benzii din mijloc, sau al primei benzi) şi să se orienteze (absolut) în raport cu terenul. În acest mod vor putea fi verificate punctele de legătură longitudinală (toleranţa fiind $3\sigma_o$), apoi punctele de legătură transversală şi în fine, punctele de reper.

Ultimul dintre factorii menţionaţi la începutul paragrafului, ce influenţează precizia aerotriangulaţiei, se referă la metoda de compensare utilizată. În legătură cu acest aspect, trebuie precizat că cel mai riguros mod de compensare este cel bazat pe fascicule fotogrammetrice şi care va trebui în consecinţă să asigure cea mai bună precizie rezultatelor finale. În cazul compensării în bloc cu modele independente, fiecare model este deformat datorită erorilor orientării relative (după cum s-a arătat în paragraful 4.2.3), iar precizia rezultatelor va fi influenţată evident de aceste deformaţii (care nu se corectează în procesul de compensare). În plus, la compensarea în bloc cu benzi, unităţile de compensare (benzile) sunt afectate şi de erorile ce apar la conexiunea modelelor succesive, iar formulele polinomiale pe baza cărora se face compensarea corectează doar parţial aceste erori. Pe de altă parte, dacă benzile se compensează separat, se poate constata o nouă diminuare a preciziei datorită ignorării legăturilor transversale dintre benzi.

În ceea ce priveşte calculul principalilor indicatori ai preciziei (eroarea medie pătratică a unităţii de pondere etc.), acesta se va face potrivit metodei de compensare utilizate pe baza formulelor dezvoltate în Anexa C. Pe de altă parte, indiferent de modul în care au fost obţinute coordonatele compensate, un bun

Scanned with OKEN Scanner

indiciu (deşi nu tocmai riguros) privind precizia rezultatelor îl oferă erorile medii pătratice m_R, m_L, m_C calculate respectiv pe baza discordanţelor în punctele de reper, în punctele de legătură şi în punctele suplimentare de control (puncte având coordonate-teren măsurate dar neutilizate în compensare):

$$m_R = \pm\sqrt{\frac{\left[v_{X_R}^2 + v_{Y_R}^2 + v_{Z_R}^2\right]}{3 \cdot n'_R}},$$

$$m_L = \pm\sqrt{\frac{\left[v_{X_L}^2 + v_{Y_L}^2 + v_{Z_L}^2\right]}{3 \cdot n'_L}}, \qquad (6.127)$$

$$m_C = \pm\sqrt{\frac{\left[v_{X_C}^2 + v_{Y_C}^2 + v_{Z_C}^2\right]}{3 \cdot n'_C}}.$$

În aceste relaţii, la numărător apar discordanţele dintre coordonatele compensate şi cele măsurate (în cazul punctelor de reper şi al punctelor suplimentare de control), respectiv discordanţele dintre coordonatele compensate ale fiecărui punct de legătură şi cele rezultate din fiecare unitate de compensare în care acesta apare, iar la numitor n'_R, n'_L, n'_C reprezintă numărul total de apariţii respectiv ale punctelor de reper, de legătură şi de control în toate unităţile de compensare ale blocului. Prin urmare, numărul de la numitor va corespunde numărului termenilor de la numărător.

Valorile obţinute cu relaţiile (6.127) vor permite aprecierea constrângerii blocului pe punctele de sprijin şi în punctele de legătură, precum şi a rezultatelor compensării în celelalte puncte. Dacă se raportează aceste valori la σ_o, se pot determina erorile relative corespunzătoare.

Scanned with OKEN Scanner

7. APARATE UTILIZATE LA EXPLOATAREA ANALITICĂ A FOTOGRAMELOR

Prima etapă a exploatării analitice constă în culegerea datelor inițiale, care urmează apoi să fie prelucrate, iar rezultatele reprezentate grafic sau numeric (după cum s-a arătat în paragraful 1.2.1.). Prin urmare, principala cerință a aparatelor utilizate la exploatarea analitică este de a permite măsurarea coordonatelor plane x,y ale punctelor-imagine.

Trebuie precizat că aceste puncte pot fi de diferite tipuri: puncte de legatură longitudinală (între fotogramele din aceeași bandă), puncte de legătură transversală (între benzile vecine), puncte de reper (care asigură legătura cu terenul), sau detalii topografice care urmează a fi restituite. Ele pot reprezenta detalii naturale sau artificiale din teren cu imagini clare pe fotograme, sau pot fi puncte premarcate în teren sau puncte marcate artificial pe fotograme.

În consecință, alegerea, marcarea și transpunerea punctelor reprezintă o etapă pregătitoare de o deosebită importanță pentru precizia rezultatelor finale. Fără a insista asupra condițiilor pe care trebuie să le îndeplinească fiecare categorie de puncte (cunoscute din fotogrammetria clasică), se vor face însă câteva mențiuni privind marcarea și transpunerea lor. Astfel, punctele de legătură longitudinală pot fi marcate (în cazul măsurării stereoscopice) pe o singură fotogramă; punctele de legatură transversală vor trebui întotdeauna transpuse pe banda vecină; punctele de sprijin (de reper) ale căror imagini apar pe mai multe fotograme din aceeași bandă sau din benzi vecine se tratează ca și punctele de legătură corespunzătoare dacă reprezintă detalii naturale, sau doar se balustrează dacă sunt puncte premarcate în teren. Detaliile topografice nu se marchează de obicei pe fotograme, punctele caracteristice măsurându-se într-o anumită ordine, conform unei schițe.

7.1. Aparate de marcare şi transpunere a punctelor

Deoarece marcarea şi transpunerea punctelor reprezintă operaţii pregătitoare importante în vederea măsurării coordonatelor-imagine ale punctelor, pentru aceste operaţii vor trebui utilizate aparate speciale de mare precizie. Aceste aparate se bazează pe observarea stereoscopică locală a fotogramelor, printr-o uşoară şi rapidă poziţionare a lor. Principiul de bază al construcţiei aparatelor de acest tip constă în realizarea unei perfecte coincidenţe a punctelor marcate cu mărcile de măsurare şi deci cu detaliile corespondente.

Aparatele moderne de marcare şi transpunere permit rotirea optică a fiecărei imagini şi modificarea continuă a scării imaginii între anumite limite (de exemplu de la 5× la 25×). Aceasta permite transferul punctelor între fotograme la diferite scări (de exemplu în cazul aerotriangulaţiei prin metoda incluziunii, prezentată în paragraful 6.4.4). O altă caracteristică a acestor aparate constă în posibilitatea utilizării atât a imaginilor pe film, cât şi pe sticlă. În continuare vor fi prezentate câteva din principalele tipuri de aparate de marcare şi transpunere a punctelor, chiar dacă nu îndeplinesc în totalitate caracteristicile menţionate anterior.

Aparatul Kern PMG 1 are 3 portclişee, ceea ce permite marcarea în zona de triplă acoperire (deosebit de avantajoasă în cazul aerotriangulaţiei). Se poate realiza observarea stereoscopică alternativă a perechilor de fotograme 1-2, 2-3 şi 1-3. Permite mărirea imaginii de la 2,5× la 50×. Marcarea se face simultan pe cele 3 imagini, cu 3 ace de safir care gravează câte un mic cerc pe fiecare fotogramă; aceasta se realizează prin acţionarea unui întrerupător electric cu pedală. La modelul PMG 2 marcarea se realizează cu ace de oţel, mărcile luminoase pot avea dimensiuni variabile individual între 30μ şi 200μ , iar mărirea imaginii se poate face în mod continuu între 5× şi 25×. Firma Kern a realizat de asemenea aparatul CPM 1, care în afară de marcarea şi transpunerea punctelor poate fi utilizat ca monocomparator şi ca stereodigitizor. El a fost obţinut pe baza modelului PMG 2, căruia i s-au adăugat codificatori liniari la portclişeul din stânga, precum şi interfaţa cu o unitate de digitizare şi un dispozitiv de înregistrare. Prin urmare, la un astfel de aparat, fiecare punct identificat este simultan marcat, măsurat şi înregistrat.

Aparatul Wild PUG 4 are două portclişee mobile şi un sistem de observare care permite mărirea imaginii între 6× şi 24× cu pasul 2 (adică, 6×, 8×, 10× etc.). Marcarea se realizează cu ajutorul a două ace de oţel cu vârfurile şlefuite excentric, care prin rotire gravează un mic cerc în stratul fotosensibil. De asemenea, pentru o

Scanned with OKEN Scanner

uşoară identificare a punctului marcat, acesta este balustrat cu o mină specială care desenează un cerc cu diametrul de 6 mm. La modelul PUG 5 mărirea poate fi modificată continuu între 6× şi 24×. De asemenea, acţionarea mărcii şi balustrării se realizează electric. Marcarea se poate face cu diametrul de 60μ, 100μ, 120μ sau 180μ.

Aparatul PM 1 Zeiss Oberkochen este prevăzut cu două portclişee care pot primi mici translaţii. Mărirea imaginii se poate realiza continuu între 6,5× şi 26×. Pentru marcarea punctelor se utilizează ace încălzite. Marcarea se poate face cu diametrul de 40μ, 70μ, 100μ sau 200μ .

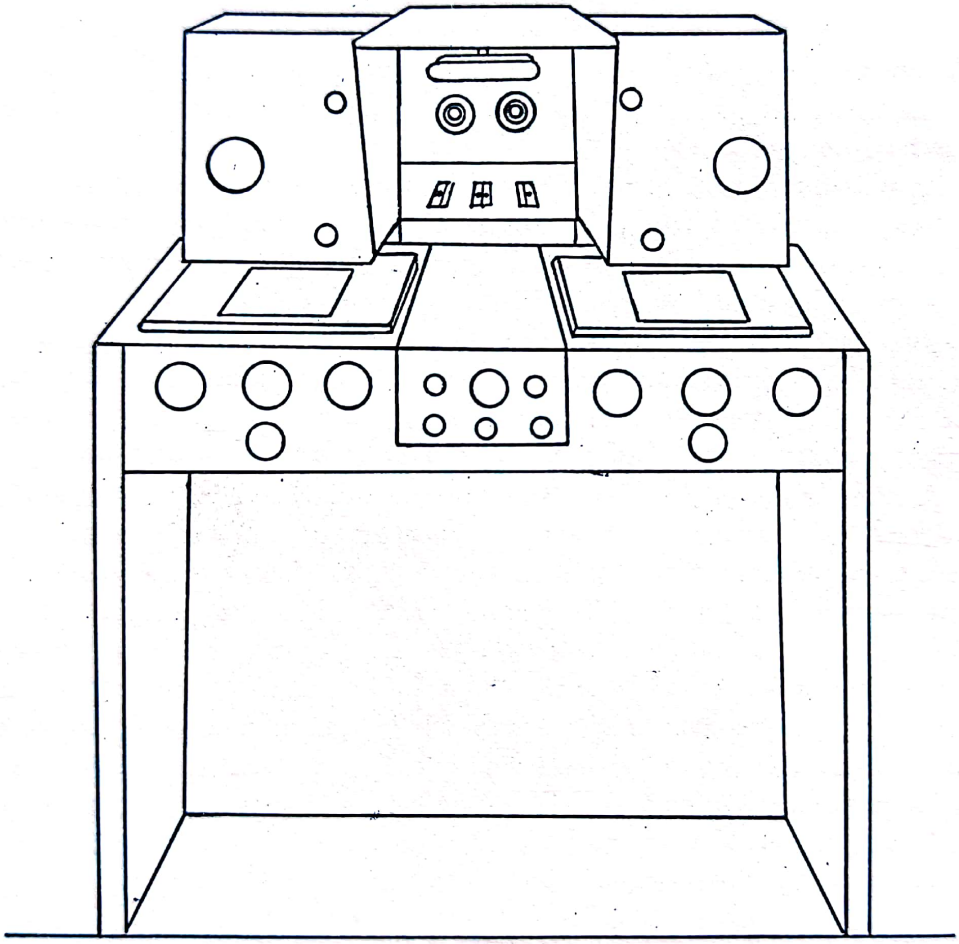

Figura 7.1. Aparatul Transmark Jena.

Aparatul Transmark Jena (fig.7.1.) are două portclişee ce pot primi mici translaţii prin acţionarea butoanelor mari de pe placa frontală. Imaginile pot fi rotite optic folosind cele două butoane mari din partea superioară. Realizează mărirea imaginilor de 10× sau opţional, de 7×, de 13×, sau de 20×. Caracteristica

Scanned with OKEN Scanner

principală a acestui aparat constă în marcarea fără contact a punctelor cu ajutorul razelor LASER care formează pe emulsie un mic disc înnegrit. Diametrul acestui disc se poate modifica între 45μ şi 100μ, pentru a fi în concordanţă cu diferitele dimensiuni ale mărcilor de măsurare utilizate la exploatare. Trebuie subliniat că acest procedeu asigură o marcare uniformă a tuturor punctelor. Marcarea se poate realiza pe fotograma din stânga, pe cea din dreapta sau pe ambele fotograme, prin acţionarea clapei corespunzătoare din cele 3 situate sub ocular.

7.2. Aparate de măsurare fotogrammetrică

După cum s-a precizat anterior, aparatele prezentate în paragraful precedent servesc unor operaţii pregătitoare. Pentru exploatarea analitică propriu-zisă se utilizează aparate care permit măsurarea coordonatelor plane x,y ale punctelor-imagine, numite comparatoare. Acestea pot fi de două tipuri: monocomparatoare şi stereocomparatoare.

7.2.1. MONOCOMPARATOARE

Monocomparatoarele sunt destinate măsurării coordonatelor punctelor pe fiecare fotogramă, independent. În acest caz deci, punctele de legătură şi (eventual) cele de sprijin vor trebui să fie marcate pe toate fotogramele pe care acestea apar.

Pe de altă parte, se poate remarca faptul că deşi ar fi suficientă observarea monoculară, monocomparatoarele moderne folosesc binoculare, pentru a evita obosirea vederii observatorului şi îmbunătăţind astfel precizia de punctare. De asemenea, aparatele moderne sunt înzestrate cu codificatori cu ieşire digitală (numerică) în vederea prelucrărilor ulterioare şi permit utilizarea atât a diapozitivelor, cât şi a negativelor pe film sau pe plăci de sticlă. La construcţia acestor aparate se aplică în general principiul lui Abbe referitor la măsurarea segmentelor şi care constă în compararea directă a segmentului care se măsoară cu o scară gradată (coliniară cu acesta).

Monocomparatorul Kern MK 1 este construit riguros pe baza principiului lui Abbe. Sistemul de măsurare conţinând două scări de sticlă dispuse perpendicular (fig.7.2), precum şi sistemul de observare cu marca de măsurare M sunt montate rigid pe placa de bază a aparatului. Pe suportul de cristal sunt gravate două linii de referinţă perpendiculare, reprezentând axele x^a,y^a ale sistemului de coordonate al aparatului. Astfel, fiecare punct i va avea coordonatele x_i^a,y_i^a în raport cu acest

sistem şi care vor putea fi înregistrate (împreună cu numărul punctului) prin acţionarea unui buton. Precizia acestor coordonate este de 1μ.

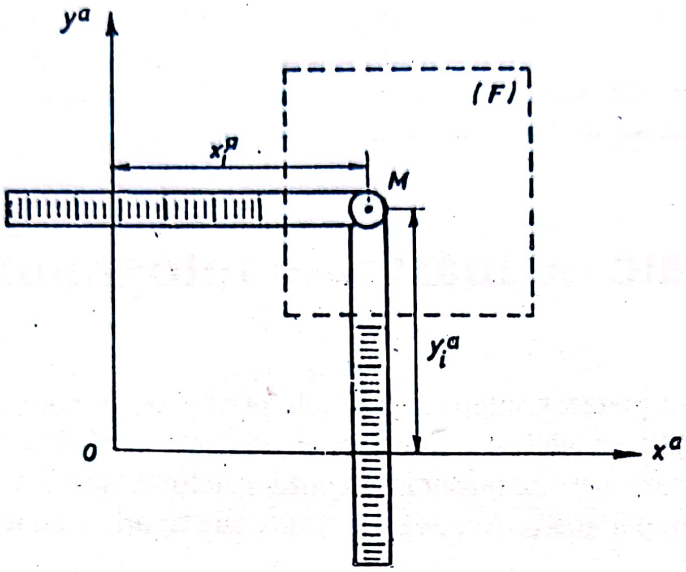

Figura 7.2. Principiul de măsurare al monocomparatorului Kern MK 1.

Se poate menţiona de asemenea modelul MK 2 (cu unele îmbunătăţiri), precum şi aparatul CPM 1 care poate fi utilizat şi pentru marcarea şi transpunerea punctelor (după cum s-a arătat în paragraful precedent).

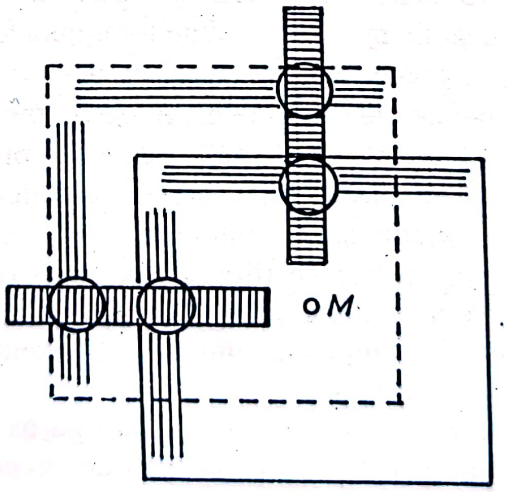

Figura 7.3. Principiul sistemului de măsurare al monocomparatorului ?K 1 Zeiss Oberkochen.

Scanned with OKEN Scanner

Monocomparatorul PK 1 Zeiss Oberkochen utilizează un sistem de măsurare fotoelectric liniar bazat pe principiul lui Abbe. Portclişeul (pe care se fixează fotograma) are trasate (pe partea inferioară) câteva linii pe cele două direcţii perpendiculare, formând o reţea-index (fig.7.3). Câte o scară gradată de sticlă este montată pe un suport ce serveşte ca ghidaj căruciorului cu capul de baleiere, formând un sistem de măsurare liniară bidimensională. Măsurarea se bazează pe interferenţa scării gradate cu reţeaua-index, producând franje Moiré. Referitor la figura 7.3 trebuie precizat că prin linii întrerupte s-a reprezentat poziţia centrală a portclişeului, iar prin linii continue poziţia corespunzătoare măsurării unui punct, identificat cu marca *M*. Această marcă poate fi aleasă din 3 tipuri de mărci luminoase şi una neagră. Observarea este binoculară şi permite măriri de 5×, 12×, 20× sau 30×.

Monocomparatorul Ascorecord Jena este construit pe baza principiului lui Abbe. Măsurarea se face cu ajutorul a două scări gradate pe sticlă şi micrometru spiral. Coordonatele se înregistrează automat, printr-un sistem electronic, cu precizia de 0,4μ. Observarea se face binocular, iar mărirea imaginii poate fi de 18×, 29×, 36×, 45×, 58× sau 90×.

7.2.2. STEREOCOMPARATOARE

Spre deosebire de monocomparatoare, stereocomparatoarele permit măsurarea simultană a coordonatelor punctelor conjugate din zona de dublă acoperire a unei stereograme, folosind efectul stereoscopic. După cum se ştie, acuitatea stereoscopică este aproximativ de două ori mai mare decât cea monoculară şi prin urmare identificarea şi punctarea se poate realiza mai precis pe baza perechilor de fotograme conjugate. De altfel, trebuie menţionat că şi în cazul măsurării coordonatelor la monocomparatoare, punctele sunt marcate stereoscopic.

Se poate remarca de asemenea, că sistemele de măsurare, de observare şi de înregistrare utilizate la stereocomparatoare sunt similare celor de la monocomparatoare. De altfel, stereocomparatorul poate fi folosit şi ca monocomparator.

Pe de altă parte, trebuie precizat că deşi teoretic ar fi mai avantajos ca fiecare fotogramă să aibă un sistem de măsurare propriu totuşi, din punct de vedere practic, translaţiile comune sunt necesare pentru a nu pierde complet impresia stereoscopică. Pentru o punctare exactă, aceste translaţii vor fi completate prin mişcări relative fine pe cele două direcţii perpendiculare, reprezentând paralaxa longitudinală *p* şi respectiv cea transversală *q*. Trebuie precizat însă că ultimele tipuri de stereocomparatoare, evitând cărucioarele suprapuse, folosesc portclişee complet separate pentru fiecare fotogramă, dar care pot fi cuplate pentru translaţii comune.

Scanned with OKEN Scanner

Primul stereocomparator a fost conceput de Pulfrich şi realizat la firma Zeiss în anul 1901. Deşi ulterior a fost îmbunătăţit din punct de vedere tehnic, principiul de măsurare a rămas acelaşi.

Stereocomparatorul Steko 1818 Jena este ultimul din seria stereocomparatoarelor simple. Aparatul permite măsurarea fotogramelor până la formatul 18 cm × 18 cm.

Căruciorul principal pe care este fixat portclişeul din stânga se poate deplasa longitudinal, în direcţia x (fig.7.4). Pe acesta se află un al doilea cărucior, pe care este montat portclişeul din dreapta, care se poate deplasa tot longitudinal în raport cu portclişeul din stânga.

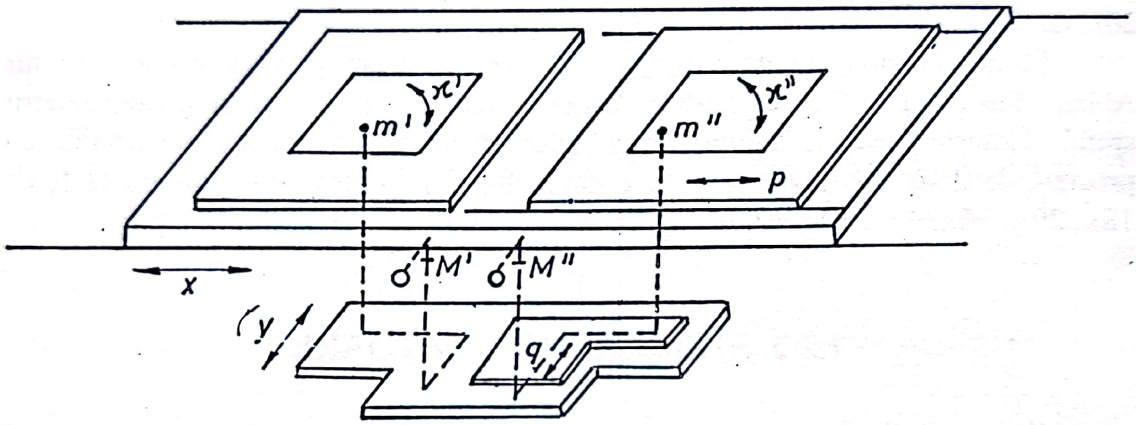

Figura 7.4. Schemă de principiu a stereocomparatorului 1818 Jena.

În direcţia y nu se mai deplasează însă fotogramele, ci o parte mobilă a sistemului de observare (sub portclişee) conţinând de asemenea un cărucior principal şi unul secundar (pentru deplasarea relativă a părţii din dreapta). Prin urmare, la stereocomparator se măsoară coordonatele x',y' corespunzătoare fotogramei din stânga şi paralaxele p şi q referitoare la fotograma din dreapta, cu ajutorul cărora se vor putea calcula coordonatele x'',y'':

$$x'' = x' - p \ , \qquad y'' = y' - q \ , \tag{7.1}$$

aceste relaţii rezultând din cele care definesc paralaxele:

$$p = x' - x'' \ , \quad q = y' - y'' \ .$$

Cu ajutorul unor tambure gradate, coordonatele x',y' se pot citi cu o precizie de 0,01 mm, iar paralaxele p şi q cu o precizie de 0,005 mm.

Trebuie menţionat de asemenea că la stereocomparator nu se formează un model stereoscopic global, ci un **model local** (în jurul punctului de determinat). Sistemul de observare al aparatului are o putere de mărire a imaginii de 8×.

Scanned with OKEN Scanner

Datorită în principal modului greoi de înregistrare (prin transcriere) a valorilor măsurate (şi susceptibil de a produce erori), acest stereocomparator este folosit azi doar în scop de instruire, sau la lucrări implicând un număr redus de măsurători.

Stecometrul Jena este compus dintr-un stereocomparator de mare precizie, cu un dispozitiv de măsurare şi de înregistrare automată a coordonatelor şi paralaxelor. Aparatul permite măsurarea fotogramelor cu formatul până la 24 cm × 24 cm.

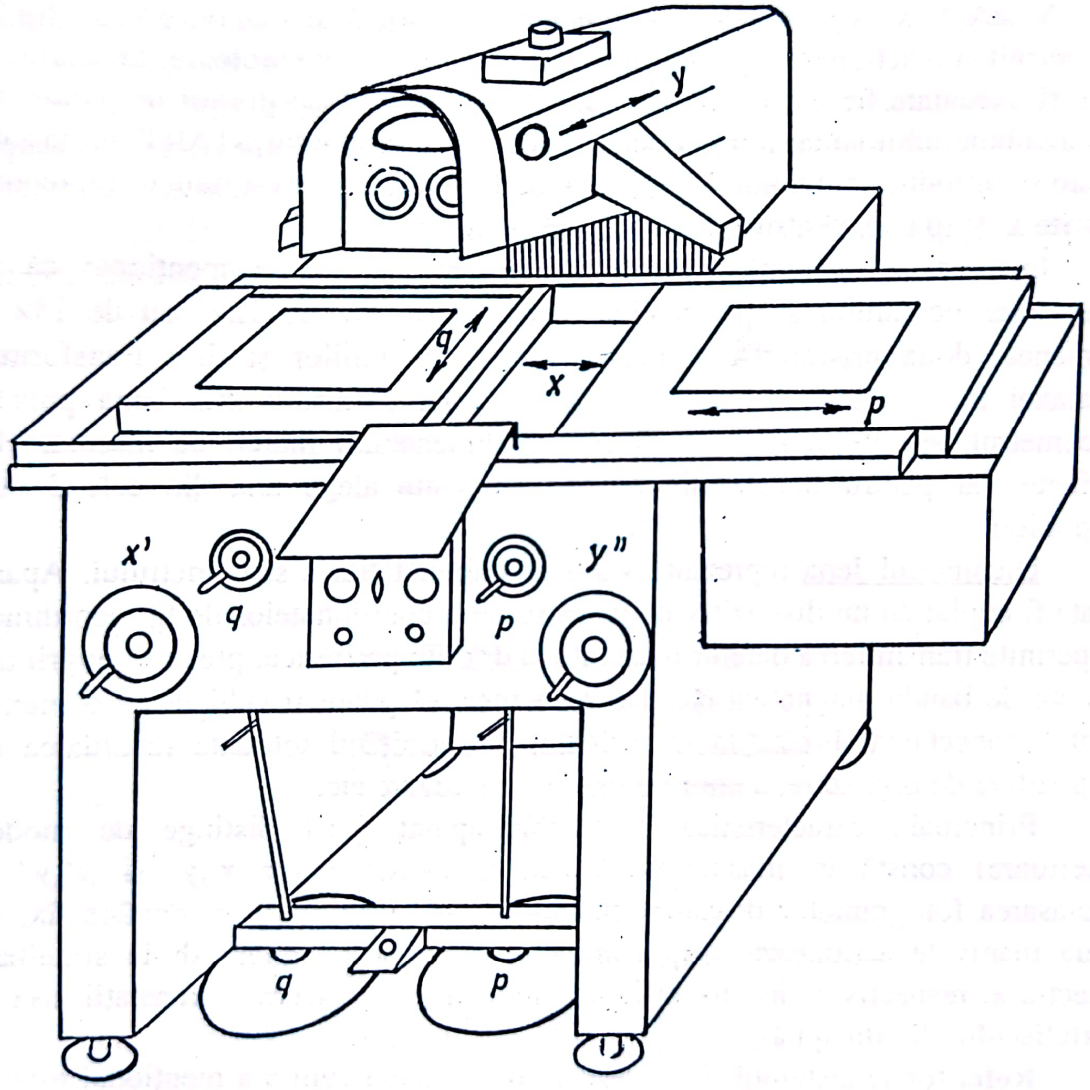

Figura 7.5. Stecometrul Jena.

Ca şi în cazul stereocomparatorului prezentat anterior, căruciorul principal cu portclişeul din stânga se poate deplasa în direcţia x împreună cu căruciorul secundar care poate imprima în plus portclişeului din dreapta o mişcare relativă în aceeaşi direcţie, reprezentând paralaxa longitudinală p (fig.7.5). Deplasarea în

direcţia y se realizează acţionând asupra părţii mobile a sistemului de observare. De asemenea, portclişeul din stânga poate primi mici translaţii în aceeaşi direcţie (y) în raport cu portclişeul din dreapta, reprezentând paralaxa transversală q. Prin urmare, la stecometru se măsoară coordonatele x',y'' şi paralaxele p şi q, cu ajutorul cărora se vor putea calcula coordonatele x'' şi y' cu relaţiile:

$$x'' = x' - p \ , \qquad y' = y'' + q \ . \tag{7.2}$$

Mişcările x' şi y'' se realizează cu ajutorul celor două manivele mari (fig.7.5) care permit şi o acţionare rapidă prin intermediul unor servomotoare. Mişcările p şi q pot fi executate fie cu manivelele mici, fie cu cele două discuri de picior. Prin apăsarea butonului situat între aceste discuri, sau a butonului START din tastatura la care se introduce şi numărul punctului, se înregistrează acest număr împreună cu valorile x',y'',p şi q, pentru care se asigură o precizie de 2μ.

În ceea ce priveşte sistemul de observare, trebuie menţionat că prin schimbarea ocularului se pot realiza 3 măriri: de 6×, de 12× sau de 18×. De asemenea, două prisme Dove permit rotirea imaginilor şi deci transformarea paralaxei longitudinale în paralaxă transversală. Pentru o mai bună punctare, stecometrul permite schimbarea formei şi dimensiunii mărcii de măsurare în 6 variante, iar pentru fiecare din acestea se poate alege una din cele 3 culori disponibile.

Dicometrul Jena reprezintă varianta îmbunătăţită a stecometrului. Aparatul poate fi cuplat cu un dispozitiv de înregistrare a coordonatelor de tip coordimetru, ce permite transmiterea datelor măsurate la diferite periferice, precum: imprimantă, unitate de bandă magnetică etc. De asemenea, el poate fi echipat cu o interfaţă, pentru conectarea directă la un calculator, permiţând totodată racordarea unor dispozitive de digitizare, a unor unităţi de vizualizare etc.

Principala caracteristică a acestui aparat (ce-l distinge de modelele anterioare) constă în măsurarea directă a coordonatelor x',y' şi x'',y'' prin deplasarea fotogramelor deasupra sistemului de observare care rămâne fix. Cele două manivele acţionează asupra ambelor portclişee, deplasându-le simultan în direcţia x, respectiv y, iar discurile de picior imprimă aceleaşi translaţii însă doar portclişeului din dreapta.

Referitor la sistemul de observare (care, după cum s-a menţionat este fix), trebuie remarcat pe de altă parte că puterea de mărire a crescut, aparatul permiţând măriri de 8×, de 14× sau de 24×, care pot fi selectate cu ajutorul unui comutator.

Stereocomparatorul PSK 2 Zeiss Oberkochen se caracterizează din punct de vedere constructiv prin dispunerea verticală a fotogramelor, ale căror dimensiuni pot ajunge până la 25 cm × 25 cm. De asemenea, spre deosebire de alte stereocomparatoare, măsurarea se realizează cu ajutorul a două grile trasate pe plăci de sticlă, cu intervalul dintre linii de 5 mm. Determinarea subdiviziunilor

Scanned with OKEN Scanner

acestui interval se face cu ajutorul unui micrometru optic, asigurându-se o precizie de 1μ la măsurarea coordonatelor.

Sistemul de observare permite mărirea imaginilor de 8×, de 12× sau de 16×. De asemenea, fiecare imagine poate fi rotită optic şi este posibilă inversarea observării celor două fotograme (obţinând efectul pseudoscopic). În sfârşit, trebuie menţionat faptul că aparatul dispune de un sistem de înregistrare automată a coordonatelor măsurate, de tip Ecomat.

Stereocomparatorul Nistri TA 3/P construit de firma O.M.I. foloseşte şuruburi de precizie pentru măsurarea coordonatelor. Principala sa caracteristică o constituie faptul că este prevăzut cu trei portclişee, ceea ce prezintă deosebite avantaje în cazul aerotriangulaţiei prin măsurarea punctelor în zona de triplă acoperire. De fapt, acest aparat este compus din 3 monocomparatoare care permit deplasarea independentă a fotogramelor în raport cu sistemul de observare. Prin urmare, coordonatele vor fi măsurate în sistemul fiecărei fotograme şi înregistrate cu o precizie de 1μ, prin intermediul unui codificator optic rotativ. Dimensiunile maxime ale fotogramelor măsurate sunt de 24 cm × 24 cm.

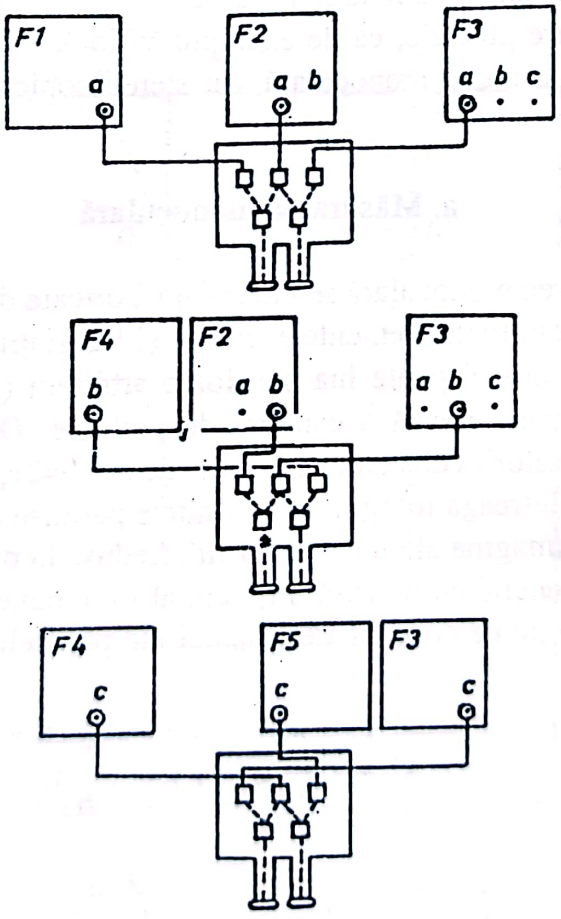

Figura 7.6. Succesiunea măsurării fotogramelor la stereocomparatorul Nistri TA 3/P O.M.I.

Sistemul de observare conţine un comutator optic ce permite ca fiecare ocular să fie conectat la oricare din cele 3 fotograme. Aceasta face ca observarea stereoscopică a unei anumite zone să poată fi urmată de observarea imediată a aceleiaşi imagini în stereograma următoare. Modul în care se realizează măsurarea fotogramelor succesive se poate urmări în figura 7.6. În prima secvenţă, punctul *a* poate fi observat (şi măsurat) în stereogramele 1-2, respectiv 2-3. În secvenţa următoare, punctul *b* este măsurat în stereogramele 2-3 şi 3-4, iar în cea de a treia este măsurat punctul *c* în stereogramele 3-4 şi 4-5.

Pe de altă parte, trebuie menţionat că aparatul permite măriri ale imaginii de 7× sau de 10×, sau (opţional) în mod continuu până la raportul 1:4,5. De asemenea, două prisme Dove permit rotirea optică a fiecărei imagini.

7.2.3. MĂSURAREA COORDONATELOR LA APARATE ANALOGICE

Dacă în locul unui comparator se dispune de un aparat analogic de stereorestituţie de mare precizie, ca de exemplu Wild A 10, Zeiss C 8 etc., acesta poate fi utilizat la măsurarea monoculară sau stereoscopică a fotogramelor (după cum se arată în [12]).

a. Măsurarea monoculară

Pentru măsurarea monoculară se poate folosi oricare din cele două camere de proiecţie. În acest scop, toate elementele (rotaţii şi translaţii) vor trebui iniţializate cu zero. Constanta camerei poate lua o valoare arbitrară (de ex. c=150mm) fără vreo legătură cu distanţa focală a camerei de preluare. Distanţa de proiecţie se alege ca multiplu al valorii constantei camerei (de ex. $h=2c$, sau $h=3c$), astfel încât să poată fi observată întreaga fotogramă în limitele permise de aparat.

Coordonatele-imagine ale unui punct m'_i (reduse la punctul principal p, care poate fi asimilat în general cu punctul mijlociu al fotogramei F) se pot calcula prin relaţii simple, în funcţie de coordonatele-aparat ale punctelor m_i şi p_o în planul de proiecţie (v.fig.7.7):

$$x'_i = -\frac{c}{h}x_i\,, \quad y'_i = -\frac{c}{h}y_i\,, \tag{7.3}$$

unde

$$x_i = x_i^a - x_o^a\,, \quad y_i = y_i^a - y_o^a\,,$$

x_o^a, y_o^a fiind mediile coordonatelor-aparat ale indicilor de referinţă.

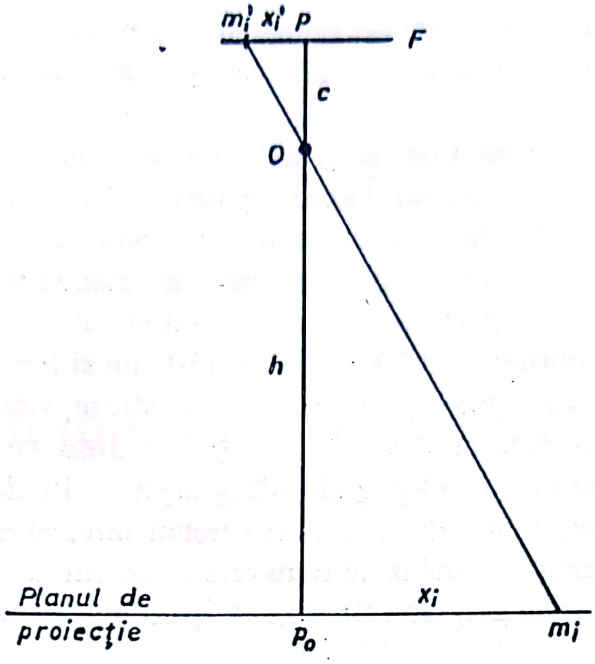

Figura 7.7. Principiul măsurării monoculare la un aparat analogic.

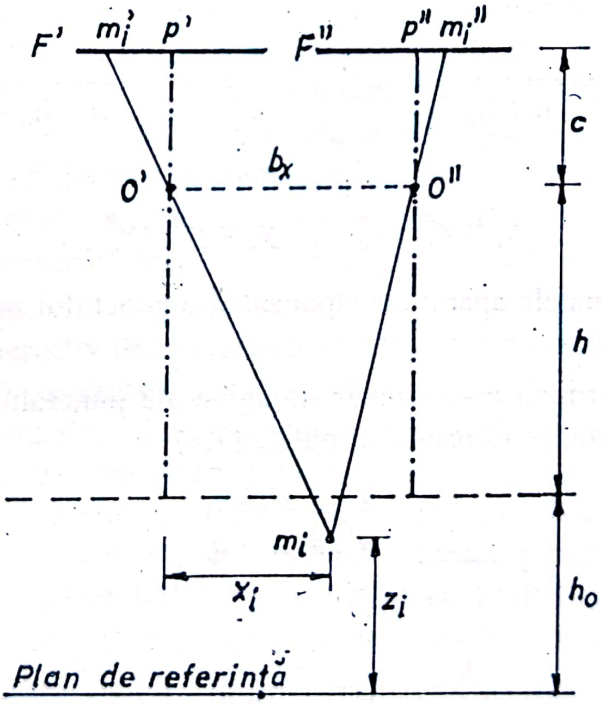

Figura 7.8. Principiul măsurării stereoscopice la un aparat analogic.

b. Măsurarea stereoscopică

În acest caz, se utilizează ambele camere ale aparatului de stereorestituţie. Dacă aparatul permite două moduri de lucru: cu baza în interior şi cu baza în

exterior, el poate fi folosit ca stereocomparator în oricare din aceste situaţii. În continuare, se va considera baza în interior şi desfăşurarea benzii de la stânga la dreapta.

Toate elementele (rotaţiile şi translaţiile ambelor camere), cu excepţia mărimii b_x, se iniţializează cu zero. În ceea ce priveşte corelaţia valorilor b_x, c şi h, aceasta trebuie realizată în conformitate cu geometria intersecţiei razelor corespondente (v.fig. 7.8). Astfel, în cazul unor fotograme preluate cu o cameră cu unghi de deschidere mare şi cu o acoperire longitudinală de 66%, cele 3 mărimi pot lua de exemplu valorile: $b_x = 200$ mm, $c = 150$ mm şi $h = 300$ mm.

De asemenea, contorul z trebuie să înregistreze valori pozitive în toate punctele m_i şi pentru aceasta indexul z va fi iniţializat cu o valoare mare (de exemplu $h_o = 200$ mm la nivelul planului de proiecţie). Pe de altă parte, se poate sublinia faptul că toate mărimile (x,y,z) vor trebui înregistrate în aceleaşi unităţi (de exemplu în milimetri). Paralaxele transversale se elimină cu b_y'' (respectiv cu b_y' în cazul bazei în exterior), iar valorile corespunzătoare vor trebui de asemenea înregistrate.

Coordonatele-imagine ale unui punct m'_i pe fotograma din stânga se poate obţine cu relaţiile:

$$x'_i = -\frac{c}{h + h_o - z_i} x_i \quad , \qquad y'_i = -\frac{c}{h + h_o - z_i} y_i \quad , \tag{7.4}$$

unde

$$x_i = x_i^a - x_o^a \quad , \quad y_i = y_i^a - y_o^a \quad ,$$

x_o^a, y_o^a fiind coordonatele-aparat corespunzătoare punctului mijlociu al fotogramei din stânga.

Pentru a determina coordonatele-imagine ale punctului conjugat m''_i de pe fotograma din dreapta, se folosesc formulele (7.1):

$$x''_i = x'_i - p_i$$
$$y''_i = y'_i - q_i$$

unde

$$p_i = -\frac{c}{h + h_o - z_i} b_x \quad , \quad q_i = -\frac{c}{h + h_o - z_i} (b''_{y_i} - b'_y) \tag{7.5}$$

În fine, se poate menţiona faptul că studiile efectuate au evidenţiat că şi pe această cale se obţin precizii comparabile măsurătorilor la stereocomparator.

Pe de altă parte, trebuie precizat faptul că aparatele analogice de stereorestituţie pot fi utilizate în fotogrammetria analitică şi pentru măsurători

tridimensionale în sistemul fiecărui stereomodel, sau chiar în sistemul benzii. Aceste date vor fi folosite la compensarea în bloc sau pe benzi cu modele independente, respectiv la compensarea în bloc cu benzi, după cum s-a arătat în capitolul 6. Totuşi, datele obţinute pe această cale vor fi afectate de erorile orientării relative şi respectiv de erorile conexiunii modelelor succesive (operaţii ce se execută la aparat). Prin urmare, precizia rezultatelor va fi mai slabă decât în cazul utilizării coordonatelor-imagine ca date iniţiale.

7.3. Sistemul interactiv de exploatare analitică

Aparatele prezentate în paragraful anterior (7.2) rezolvă numai prima din cele 3 etape ale exploatării fotogrammetrice analitice şi anume culegerea şi înregistrarea datelor. După cum s-a arătat în paragraful 1.2.1, pentru prelucrarea acestor date este necesar un calculator electronic numeric, iar pentru reprezentarea rezultatelor (sub forma grafică) va trebui utilizată o masă trasantă. Trecerea de la o etapă la alta implică însă importante surse de erori şi prin urmare, includerea celor 3 etape într-un sistem integrat reprezintă o necesitate majoră în vederea unei exploatări analitice eficiente. De asemenea, un astfel de sistem trebuie să permită verificarea în mod interactiv a datelor, pentru depistarea şi eliminarea erorilor mari, ca de altfel a tuturor erorilor care conduc la depăşirea toleranţelor pentru rezultatele intermediare şi finale.

Un sistem interactiv de exploatare analitică poate conţine mai multe staţii de lucru (de ex. şase) racordate la un sistem de calcul şi la o configuraţie de reprezentare a rezultatelor. Staţia de lucru este alcătuită dintr-un aparat de tip stereocomparator (de ex. stecometru), un dispozitiv de conversie analog-numerică (de ex. coordimetru), un microcalculator (de ex. PC-286) şi o linie de transmitere a datelor spre şi de la calculatorul central. Acesta poate fi de exemplu un minicalculator Independent I-102 F compatibil cu PDP-11. Pentru reprezentarea grafică a rezultatelor se poate utiliza o masă trasantă Aristomat (de ex.).

Prelucrarea iniţială a datelor, validarea măsurătorilor şi înregistrarea lor se pot executa fie sub controlul unui program supervizor care rulează pe minicalculator, fie la nivelul staţiei de lucru (pe microcalculatorul fiecărei staţii), urmând ca eventualele prelucrări complexe să se facă pe minicalculator (după cum se arată în [9]).

Validarea datelor iniţiale constă în verificarea indicilor de referinţă şi a punctelor-imagine măsurate. Pentru fiecare pereche de fotograme se înregistrează numerele acestora precum şi numerele indicilor de referinţă şi ale punctelor-

Scanned with OKEN Scanner

imagine împreună cu măsurătorile corespunzătoare (x,y,p,q). Referitor la indici, se verifică dacă observarea acestora s-a efectuat în ordinea stabilită (v.fig.2.1 şi 2.2). De asemenea, se compară distanţele dintre indici rezultate din măsurători cu cele calibrate, diferenţele lor trebuind să se încadreze în anumite limite. La toate aceste verificări, pe ecran va apare mesajul corespunzător situaţiei concrete.

Dacă operaţiile referitoare la indicii de referinţă s-au executat corect, se poate trece la orientarea relativă pe baza punctelor standard (şi eventual a unor puncte suplimentare alese în acest scop). După realizarea orientării relative, se calculează paralaxele reziduale şi dacă este depăşită o anumită toleranţă apare un mesaj prin care se precizează punctul (sau punctele) în care apare această depăşire. Se face apoi reobservarea şi înregistrarea noilor valori măsurate şi recalcularea orientării relative.

După formarea corectă a stereomodelului se realizează conexiunea acestuia cu cel anterior (adus în sistemul benzii). Dacă legarea modelului nu este posibilă, se afişează un mesaj în care se specifică numărul punctului şi valoarea care depăşeşte toleranţa. Punctul respectiv va trebui reobservat, refăcând apoi orientarea relativă şi legarea modelului de cel precedent.

La realizarea conexiunii tuturor modelelor apare mesajul corespunzător, iar fişierul benzii va conţine toate elementele necesare prelucrărilor ulterioare. Se verifică apoi existenţa fişierului de bază cu constantele benzii, după care se poate trece la orientarea absolută şi compensarea benzii. În prealabil vor trebui însă verificate punctele de reper şi eliminate eventualele puncte necorespunzătoare. Compensarea benzii se finalizează cu un fişier conţinând coordonatele-teren ale punctelor de aerotriangulaţie. Acestea pot fi considerate ca valori aproximative într-o compensare în bloc cu benzi, cu modele independente, sau cu fascicule. Pentru aceasta, vor trebui păstrate fişierele cu datele validate pe fotograme, pe modele independente şi pe benzi.

În fine, vor trebui menţionate principalele avantaje pe care le oferă sistemul interactiv de exploatare analitică şi anume: realizarea unui proces unitar de culegere, validare şi prelucrare a datelor; eliminarea totală a greşelilor care se datorau procesului de lucru segmentat; micşorarea considerabilă a timpului de culegere şi de prelucrare a datelor; creşterea semnificativă a preciziei rezultatelor; mărirea eficienţei cu aproximativ 50%.

7.4. Aparate de stereorestituţie analitică

Aparatele de stereorestituţie analitică se bazează pe principiile formulate de U.V.Helava în 1957. La aceste aparate, proiecţia fizică este înlocuită printr-una

Scanned with OKEN Scanner

matematică. Prin urmare, legătura între coordonatele-imagine măsurate în planul fiecărei fotograme şi coordonatele-teren în sistemul tridimensional al spaţiului-obiect se realizează pe cale matematică. Aceasta elimină limitările impuse de componentele mecanice şi optice ale aparatelor analogice de stereorestituţie, permiţând totodată obţinerea unei precizii superioare. La aparatele analitice se pot exploata fotograme de diferite tipuri, cu format diferit şi cu distanţe focale diferite. Pe de altă parte, corecţiile se pot aplica într-o manieră foarte simplă, pe baza relaţiilor matematice care le definesc. De asemenea, aparatele de stereorestituţie analitică permit o rezolvare eficientă a tuturor problemelor privind aerotriangulaţia, modelul numeric al terenului (DTM), sistemul informaţional geografic (GIS) etc.

Configuraţia de bază a unui aparat de stereorestituţie analitică presupune 3 componente interconectate, dar cu funcţiuni independente (v.fig.7.9): un aparat de observare a fotogramelor (de tip stereocomparator), un calculator şi o masă trasantă (coordonatograf automatizat), care se poate considera însă o componentă opţională (după cum se arată în [2]).

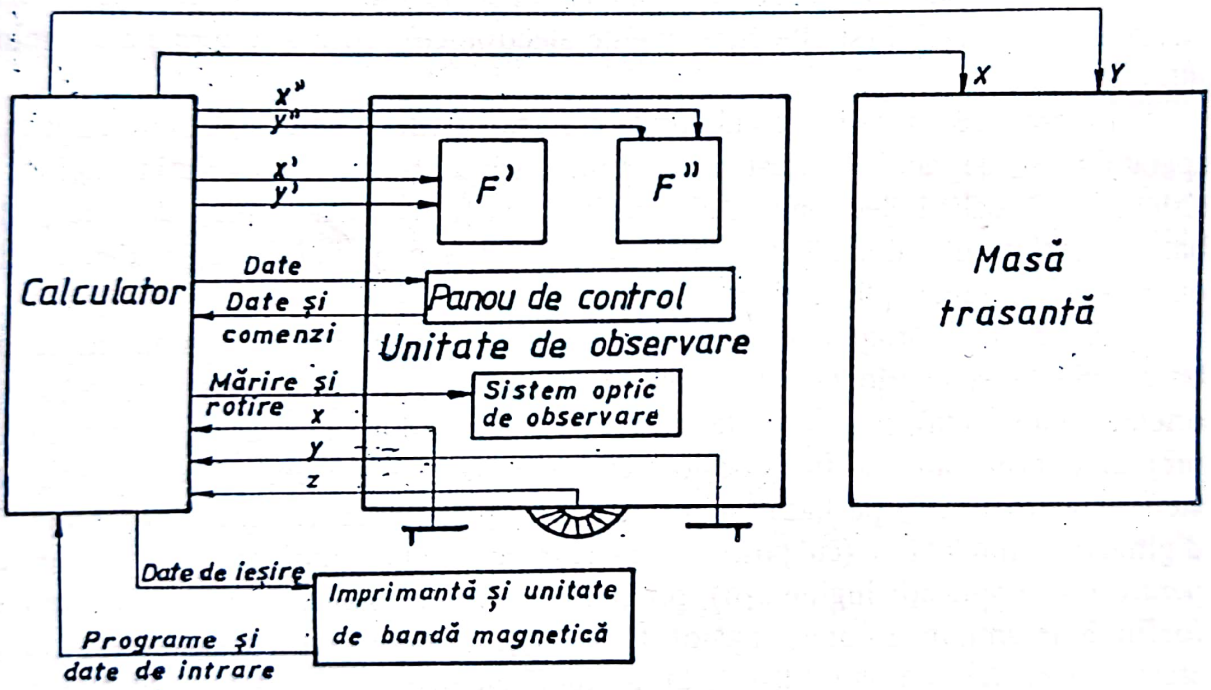

Figura 7.9. Reprezentarea schematică a unui aparat de stereorestituţie analitică.

Unitatea de observare stereoscopică este alcătuită dintr-un sistem optic binocular, două portclişee (pe care se fixează cele două fotograme conjugate), dispozitive de control pentru deplasarea portclişeelor şi eventual a unor părţi mobile ale sistemului optic şi sistemul de iluminare a imaginilor fotografice. Sistemul binocular poate fi prevăzut cu posibilitatea măririi continue a imaginilor precum şi a rotirii acestora (sub controlul calculatorului). De asemenea, un dispozitiv special permite inversarea traseelor de observare ale celor două

Scanned with OKEN Scanner

fotograme, astfel încât fotograma din stânga să se observe cu ochiul drept şi cea din dreapta cu ochiul stâng.

Pentru deplasarea aparentă a mărcii de măsurare, majoritatea aparatelor utilizează două manivele şi un disc de picior. Trebuie remarcat faptul că operaţiunile se efectuează oarecum invers faţă de procedeele fotogrammetrice analitice clasice, în sensul că poziţia fiecărui punct se stabileşte mai întâi în modelul stereoscopic (cu ajutorul manivelelor şi a discului de picior) iar apoi, prin intermediul calculatorului, se determină poziţiile imaginilor în raport cu indicii de referinţă ai fotogramelor. Deplasarea portclişeelor (şi eventual a unor părţi mobile ale sistemului optic) se realizează cu ajutorul unor dispozitive de poziţionare, acţionate prin servomotoare comandate de calculator. Aceste operaţii se execută prin intermediul unor codificatori liniari sau rotativi care permit introducerea prin interfaţă a datelor (provenind de la manivele şi discul de picior) în calculator, sub forma coordonatelor-model, iar calculatorul la rândul său transmite instrucţiuni servomotoarelor pentru poziţionarea portclişeelor.

Pe de altă parte, se poate menţiona că unele aparate mai noi, care utilizează corelatorul de imagini (şi alte componente electronice), operează aproape complet automat.

În ceea ce priveşte calculatorul, caracteristicile acestuia depind de tipul aparatului şi de anul fabricaţiei acestuia, având în vedere evoluţia rapidă a sistemelor de calcul electronic. De asemenea, pot fi prevăzute unităţi de disc şi de bandă, display, imprimantă etc. Programele utilizate se pot clasifica în sisteme de operare şi programe aplicative.

Principalele programe aplicative se referă la operaţiile fotogrammetrice de bază (orientarea interioară, corectarea coordonatelor-imagine, orientarea relativă, orientarea absolută), precum şi la aerotriangulaţie. De asemenea, pot fi prevăzute programe prin care să fie stocate (temporar sau permanent) date privind un stereomodel (de ex.) pe baza cărora acesta va putea fi reconstituit, programe de digitizare a modelului (cu posibilitatea extragerii unor anumite zone de interes pentru unele aplicaţii inginereşti), programe de calcul pentru suprafeţe şi volume (definite de un număr corespunzător de puncte), programe care permit inserarea în stereomodel (cu culoare distinctă) a unor elemente proiectate, definite prin coordonatele punctelor caracteristice etc.

În sfârşit, masa trasantă permite restituţia grafică a detaliilor planimetrice şi altimetrice prin intermediul a două servomotoare comandate de calculator. Caracteristicile ei tehnice depind de tipul aparatului.

Primul aparat de stereorestituţie analitică (Analytical Plotter) denumit AP/1 a fost realizat de firma Ottico Meccanica Italiana (OMI) în colaborare cu Bendix Corporation în anul 1961, pe baza principiilor formulate de Helava. La acest aparat însă, o serie de operaţii se execută manual, iar calculatorul nu are la dispoziţie toate programele necesare exploatării fotogrammetrice. Acest prototip a fost îmbunătăţit,

Scanned with OKEN Scanner

obţinându-se modelul operaţional AP/2, permiţând şi utilizarea fotografiilor nemetrice şi panoramice. Versiunea perfecţionată a acestuia a căpătat denumirea AS 11 A (cu precizia de măsurare sub 5μ), devenind AS 11 B la introducerea corelării electronice a imaginilor. De asemenea, acest aparat se poate cupla cu un dispozitiv de redresare diferenţială.

Timp de 15 ani (1961-1976) colaborarea OMI-Bendix a dominat construcţia de aparate analitice. În 1976, Bendix a realizat propria versiune sub denumirea US 1 şi aproape în acelaşi timp OMI prezintă noul model AP/C4, atingând precizia de măsurare de 2μ prin utilizarea de codificatori optici liniari. La acest aparat se pot exploata fotograme (negative sau diapozitive) până la formatul 25 cm × 25 cm. Sistemul optic permite măriri standard de 7×, 12× sau 20×, alternativ cu un sistem de mărire continuă ("zoom") între 5× şi 45×. Pe lângă observarea ortoscopică sau pseudoscopică a fotogramelor conjugate este posibilă şi observarea binoculară a unei singure imagini. Portclişeele se pot deplasa doar în direcţia *y*, iar în direcţia *x* se deplasează părţi mobile ale sistemului optic. Prin aceasta se evită posibilele erori provenind din dispunerea suprapusă a cărucioarelor ce conţin portclişeele. Marca de măsurare poate fi opacă (un disc cu un anumit diametru) sau luminoasă (cu diametru reglabil). Calculatorul utilizat este PDP-11/03 realizat de Digital Equipment Corporation (DEC).

Tot în 1976, firma franceza Matra Optique realizează aparatul Traster SST. Acesta se caracterizează în primul rând prin particularitatea sistemului de observare, utilizând la separarea imaginilor filtre polaroide. Cele două imagini conjugate sunt proiectate astfel pe un ecran cu dimensiuni de aproximativ 42 mm la scara fotogramelor mărită de 10×, iar observarea stereoscopică se realizează cu ajutorul unor ochelari speciali. Marca de măsurare este situată în centrul ecranului şi rămâne fixă, în timp ce imaginile proiectate se deplasează. Măsurarea se realizează cu o precizie de 2μ, utilizând codificatori optici liniari. Aparatul dispune de un calculator Eclipse S-130 sau S-140, cu perifericele obişnuite (imprimantă etc.)

În acelaşi an (1976) firma Zeiss Oberkochen din Germania realiza sistemul Planicomp C-100. La acest aparat sistemul optic este fix, iar cele două portclişee sunt deplasate separat în direcţiile *x* şi *y*. Imaginile pot fi mărite de 8× sau de 16×, iar marca de măsurare (luminoasă sau întunecată) poate avea diametrul de 20μ sau de 40μ. Aparatul utilizează un minicalculator Hewlett Packard HP 1000. Modelele ulterioare ale acestui aparat (P1,P2,P3) prezintă o serie de caracteristici importante. Astfel, marca de măsurare poate fi deplasată în model fie utilizând manivelele şi discul de picior, fie cu ajutorul unui cursor ghidat manual pe o masă de digitizare (de mare rezoluţie). Sistemul optic permite mărirea continuă a imaginilor de la 5× la 20×, iar marca de măsurare (luminoasă sau întunecată) poate avea dimensiuni variabile. De asemenea, este posibilă conexiunea camerelor CCD. În fine, trebuie

Scanned with OKEN Scanner

menţionat că se pot exploata fotograme aeriene la orice scară, precum şi imagini satelitare.

O altă serie de aparate de stereorestituţie analitică a fost realizată de firma Leica Heerbrugg din Elveţia. Dintre acestea se poate menţiona aparatul Aviolyt WILD BC 3, care asigură o precizie de măsurare de 2μ. Sistemul logic structurat pe opţiuni ("meniuri") şi bazat pe dialog interactiv imprimă o productivitate sporită şi o siguranţă ridicată în toate fazele de lucru. Aparatul dispune de un sistem optic cu o putere de separare ridicată şi cu numeroase opţiuni. Marca de măsurare poate fi punctiformă sau inelară, de diferite culori şi mărimi. Pentru deplasarea mărcii pot fi utilizate manivelele şi discul de picior, sau un cursor ghidat manual. Aparatul conţine un calculator PC, iar masa de desen este de tipul Aviotab.

Pot fi menţionate de asemenea şi alte câteva tipuri de aparate de stereorestituţie analitică cum ar fi: US 2 realizat în S.U.A. de Helava Associates, Autoplot construit de Systemhouse din Canada, Alpha 2000 realizat de firma International Imaging Systems din S.U.A., sistemul fotogrammetric universal DSR produs de Leica (Elveţia), Galileo D.S. Digital Stereocartograph şi Digicart-40 construite de Officine Galileo din Italia, precum şi modelele mai noi realizate de firma O.M.I. (AP/C5, ASP-11PA).

În afară de aparatele universale de stereorestituţie analitică ce se caracterizează printr-o înaltă precizie precum şi prin numeroase şi variate aplicaţii, există şi o altă categorie de aparate bazate pe aceleaşi principii dar cu anumite limi ˘ri, numite aparate simplificate de stereorestituţie analitică. Aceste aparate sunt mai accesibile şi pot fi utilizate cu succes în anumite aplicaţii, îndeosebi când nu se cere o precizie prea mare. Un astfel de aparat este Zeiss Stereocord G2, realizat după APPS (Analytical Photogrammetric Positioning System). Acesta (APPS), construit la US Army Engineer Topographical Laboratories, este un Stereotop Zeiss modificat, calculatoarele analogice mecanice fiind înlocuite printr-un calculator electronic de birou (Hewlett-Packard 9810). O variantă îmbunătăţită o constituie Zeiss Stereocord G3, caracterizat printr-un mod de operare foarte simplu. După executarea punctării de către operator, coordonatele şi paralaxele măsurate sunt digitizate şi transferate la calculator. Aici au fost introduse iniţial elementele de orientare interioară şi coordonatele-teren ale punctelor de sprijin, astfel încât se poate calcula orientarea relativă şi apoi cea absolută. În continuare, se vor putea determina coordonatele-teren ale fiecărui punct-imagine măsurat, iar coordonatele planimetrice astfel obţinute vor putea fi transmise mesei de restituţie. Alte aparate din această categorie sunt Stereobit realizat la Officine Galileo, Kartoflex M construit la Jena etc.

În fine, va trebui subliniat faptul că utilizarea productivă a aparatelor de stereorestituţie analitică este relativ limitată, datorită în principal costului lor ridicat. De aceea, numeroase firme oferă astfel de aparate în configuraţie minimală (de exemplu fără masă trasantă, cu un calculator mai puţin performant şi fără unele

Scanned with OKEN Scanner

accesorii etc.) la un cost redus, urmând ca celelalte componente să fie achiziţionate eventual ulterior (în funcţie de necesităţile concrete). O altă variantă ar fi utilizarea unui calculator "central" pentru prelucrările mai laborioase (compensarea aerotriangulaţiei etc.) în legătură cu mai multe staţii de lucru dotate cu microcalculatoare, după modelul prezentat în paragraful anterior. Având în vedere însă scăderea continuă a costului componentelor electronice, se poate constata că o pondere tot mai mare în preţul unui astfel de aparat o are componenta logică (îndeosebi programele aplicative).

Cu toate inconvenientele menţionate, trebuie subliniat faptul că metodele analitice de exploatare fotogrammetrică şi-au dovedit pe deplin eficienţa.

Scanned with OKEN Scanner

ANEXA A

ELEMENTE DE GEOMETRIE ANALITICĂ ŞI PROIECTIVĂ

A.1. Sisteme de coordonate

Sistemele de coordonate spaţiale utilizate în fotogrammetrie sunt triedre rectangulare, care pot fi de dispunere pozitivă sau negativă (fig. A.1.a şi b) după cum sensul rotaţiei axei X către Y pe drumul cel mai scurt coincide sau nu cu sensul pozitiv al rotaţiei în jurul axei Z. Această definiţie poate fi formulată similar dacă în locul axelor X,Y,Z se consideră respectiv Y,Z,X, sau Z,X,Y.

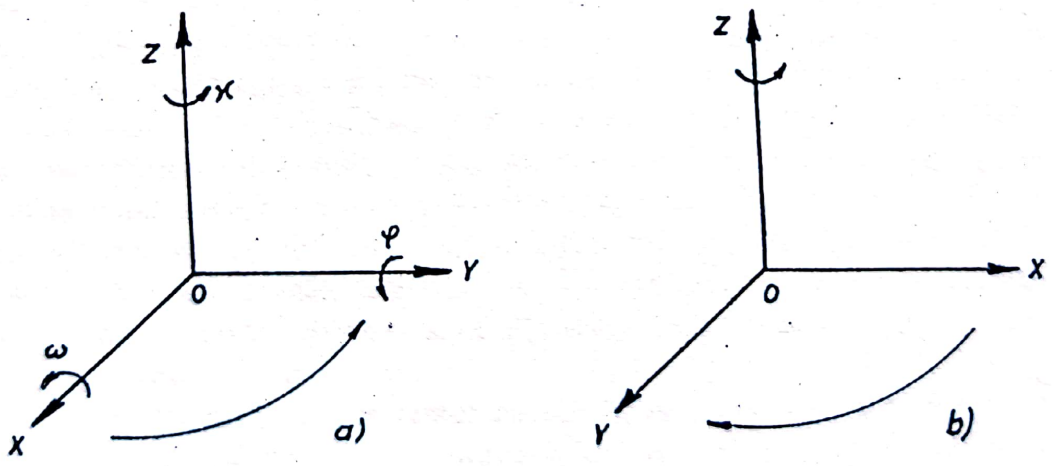

Figura A.1. (a) Triedru rectangular drept de sens direct, sau de dispunere pozitivă; (b) Triedru rectangular stâng, de sens invers, sau de dispunere negativă.

Scanned with OKEN Scanner

După cum se ştie, sensul pozitiv al rotaţiei în jurul unei axe este dat de "regula şurubului": o rotaţie este pozitivă dacă determină înaintarea şurubului în sensul pozitiv al axei.

În fotogrammetrie, rotaţiile în jurul axelor X, Y şi Z se notează respectiv cu ω, φ şi κ (fig. A.1.a).

Trebuie remarcat că în dezvoltările teoretice se vor utiliza sisteme de coordonate ortogonale (rectangulare) de dispunere pozitivă, iar rotaţiile se vor considera de asemenea în sens pozitiv.

Pe de altă parte, se vor avea în vedere două tipuri de sisteme de coordonate:

- sistem de referinţă considerat fixat;
- sistem arbitrar, care poate primi translaţii, rotaţii, modificări de scară.

A.2. Transformări de coordonate

Trebuie subliniat că transformările de coordonate constituie o problemă fundamentală în fotogrammetria analitică (precum şi pentru alte discipline din domeniul măsurătorilor terestre şi chiar din alte domenii). În consecinţă, acestei probleme i se va acorda o atenţie deosebită şi va fi tratată sub diversele ei aspecte.

A.2.1. Transformări de coordonate în plan

a. Transformarea conformă liniară

Această transformare (numită şi **transformare ortogonală plană**) conţine 4 parametri independenţi: două translaţii X_o, Y_o (reprezentând coordonatele originii sistemului arbitrar în raport cu cel de referinţă), factorul de scară m şi rotaţia plană κ (fig. A.2). Transformarea conformă liniară se poate exprima prin relaţiile:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa \\ \sin\kappa & \cos\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{(A.1)}$$

sau, dacă se notează matricea de rotaţie cu R_κ, iar vectorii se reprezintă prin primul element, relaţiile (A.1) se pot scrie sub forma:

$$X = X_o + m\, R_\kappa\, x \ . \qquad \text{(A.2)}$$

Pentru a aduce aceste relaţii la o formă mai convenabilă din punct de vedere aplicativ, se notează:

Scanned with OKEN Scanner

$$a_o = X_o \ , \ a_1 = m \cos k \ ,$$
$$b_o = Y_o \ , \ b_1 = m \sin k \ , \qquad \text{(A.3)}$$

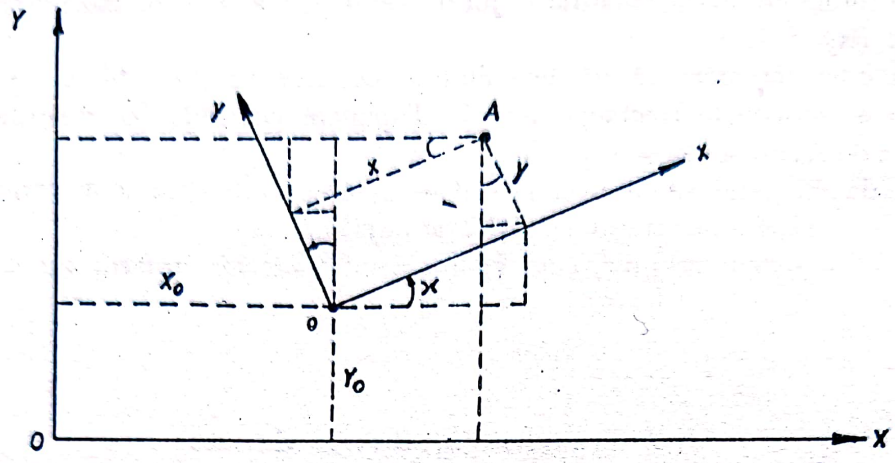

Figura A.2. Transformarea conformă liniară.

relaţiile (A.1) devenind:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_o \\ b_o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ,$$

sau

$$\begin{cases} X = a_o + a_1 x - b_1 y \\ Y = b_o + b_1 x + a_1 y \ . \end{cases} \qquad \text{(A.4)}$$

Această formă prezintă avantajul că în scriere matriceală permite evidenţierea parametrilor transformării şi a coeficienţilor acestora:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & -y \\ 0 & 1 & y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_o \\ b_o \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} . \qquad \text{(A.5)}$$

Pentru determinarea celor 4 parametri este necesară cunoaşterea coordonatelor în cele două sisteme (x,y şi X,Y) pentru două puncte. O bună soluţie numerică implică (din punct de vedere geometric) cerinţa ca cele două puncte să fie cât mai depărtate unul de altul.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul coordonatelor obținute prin măsurători, la determinarea parametrilor se va aplica metoda pătratelor minime și în consecință vor trebui cunoscute coordonatele (în cele două sisteme) pentru un număr de cel puțin 3 puncte ($n>2$).

b. Transformarea afină în plan

Ca și în cazul transformării conforme, transformarea afină implică două translații X_o , Y_o , o rotație plană κ, dar scara se consideră diferită pe cele două direcții (m_x , m_y) și în plus se are în vedere o neortogonalitate ε . Această transformare se poate exprima prin relațiile:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa \\ \sin\kappa & \cos\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} . \qquad \text{(A.6)}$$

Dacă se notează:

$$\begin{aligned} a_o &= X_o \\ a_1 &= m_x \cos\kappa + \varepsilon m_y \sin\kappa \\ a_2 &= -m_x \sin\kappa + \varepsilon m_y \cos\kappa \\ b_o &= Y_o \\ b_1 &= m_y \sin\kappa \\ b_2 &= m_y \cos\kappa \end{aligned}$$

se obține:

$$\begin{aligned} X &= a_o + a_1 x + a_2 y \\ Y &= b_o + b_1 x + b_2 y \end{aligned} \qquad \text{(A.7)}$$

sau, în forma matriceală:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \\ b_o \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Se observă că cele două relații sunt independente privind parametrii necunoscuți și se vor putea scrie sub forma:

$$X = (1\ x\ y)\begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$Y = (1\ x\ y)\begin{pmatrix} b_o \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Transformarea afină în plan conţine deci 6 parametri, pentru determinarea cărora sunt necesare 3 puncte având coordonatele cunoscute în cele două sisteme, cu observaţia că în cazul aplicării metodei pătratelor minime, numărul punctelor va trebui să fie de cel puţin 4 ($n>3$). În acest caz, se mai poate remarca obţinerea aceleiaşi matrice a coeficienţilor sistemului de ecuaţii normale atât pentru X, cât şi pentru Y.

În fine, se poate menţiona cazul particular al transformării **centro-afine**, care conservă originea (dispărând deci translaţiile):

$$\begin{aligned} X &= a_1 x + a_2 y \\ Y &= b_1 x + b_2 y \end{aligned} \qquad \text{(A.8)}$$

După cum se observă, această transformare conţine 4 parametri independenţi, care pot fi determinaţi pe baza a două puncte, respectiv $n>2$ puncte în cazul aplicării metodei pătratelor minime.

c. Transformarea plană neliniară utilizând polinoame

În cazul general, polinoamele în x şi y sunt de forma:

$$\begin{aligned} X &= a_o+a_1x+a_2y+a_3x^2+a_4xy+a_5y^2+a_6x^3+a_7x^2y+a_8xy^2+a_9y^3+ \ldots \\ Y &= b_o+b_1x+b_2y+b_3x^2+b_4xy+b_5y^2+b_6x^3+b_7x^2y+b_8xy^2+b_9y^3+ \ldots \end{aligned} \qquad \text{(A.9)}$$

De obicei, se folosesc însă forme particulare reduse, cu un număr restrâns de termeni, dintre care vor fi prezentate 4 variante utilizate cu precădere în fotogrammetrie:

c_1. Polinoame de ordinul II cu 4 termeni

$$\begin{aligned} X &= a_o + a_1 x + a_2 y + a_3 xy \\ Y &= b_o + b_1 x + b_2 y + b_3 xy \end{aligned} \qquad \text{(A.10)}$$

După cum se observă, aceste relaţii conţinând 8 parametri diferă de cele reprezentând transformarea afină (A.7) doar prin ultimul termen (a_3xy, respectiv b_3xy), care implică o deformare hiperbolică.

c_2. Polinoame de ordinul II cu 5 termeni

$$\begin{aligned} X &= a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 \\ Y &= b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 xy + b_4 x^2 \end{aligned} \qquad \text{(A.11)}$$

Această transformare conţinând 10 parametri diferă de cea anterioară prin termenul parabolic ($a_4 x^2$, respectiv $b_4 x^2$). Şi în acest caz, cele două relaţii (în X şi în Y) sunt independente în raport cu parametrii necunoscuţi şi pot fi tratate separat.

c_3. Polinoame de ordinul II cu 5 termeni şi parametri comuni

$$\begin{cases} X = a_0 + a_1 x - b_1 y + a_2 x^2 - 2b_2 xy \\ Y = b_0 + b_1 x + a_1 y + b_2 x^2 + 2a_2 xy \end{cases} \qquad \text{(A.12)}$$

În acest caz, cele două relaţii nu mai sunt independente, 4 din cei 6 parametri fiind comuni.

c_4. Transformarea conformă de ordinul II, în plan

$$\begin{cases} X = a_0 + a_1 x - b_1 y + a_2 \left(x^2 - y^2\right) - 2b_2 xy \\ Y = b_0 + b_1 x + a_1 y + b_2 \left(x^2 - y^2\right) + 2a_2 xy \end{cases} \qquad \text{(A.13)}$$

Ca şi în cazul anterior, 4 din cei 6 parametri sunt comuni, dar apare în plus termenul $-a_2 y^2$, respectiv $-b_2 y^2$. Pe de altă parte, trebuie remarcat caracterul de transformare conformă care face ca o reţea rectangulară pătratică, deşi se transformă într-o reţea de curbe de ordinul II, intersecţiile acestor curbe să fie de asemenea rectangulare.

Scanned with OKEN Scanner

A.2.2. Transformări de coordonate în spaţiul tridimensional

a. Rotaţia spaţială

a_1. Condiţiile de ortogonalitate. Proprietăţile matricelor ortogonale

Se consideră două sisteme de coordonate ortogonale în spaţiu: $OXYZ$ (sistem de referinţă) şi $Oxyz$ (sistem arbitrar, rotit), ambele de dispunere pozitivă şi având aceeaşi origine O (fig.A.3)

Relaţiile dintre coordonatele X,Y,Z ale unui punct A în sistemul de referinţă şi coordonatele x,y,z ale aceluiaşi punct în sistemul rotit se pot exprima sub forma:

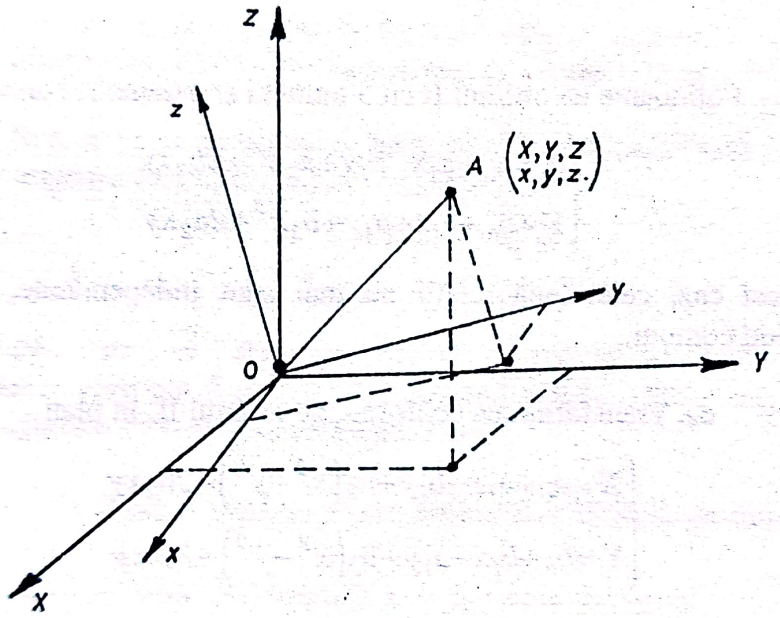

Figura A.3. Rotaţia spaţială.

$$\begin{cases} X = r_{11}x + r_{12}y + r_{13}z \\ Y = r_{21}x + r_{22}y + r_{23}z \\ Z = r_{31}x + r_{32}y + r_{33}z \end{cases} \tag{A.14}$$

sau, în reprezentare martriceală,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

adică, având în vedere convenţia de notare specificată anterior,

$$X = R\,x\ . \tag{A.15}$$

Elementele r_{ij} ale matricei de rotaţie R sunt cosinusurile directoare ale axelor $O(x,y,z)$ în raport cu axele $O(X,Y,Z)$:

$$\begin{aligned} &r_{11} = \cos(x,X)\ ;\ r_{12} = \cos(y,X)\ ;\ r_{13} = \cos(z,X)\ ;\\ &r_{21} = \cos(x,Y)\ ;\ r_{22} = \cos(y,Y)\ ;\ r_{23} = \cos(z,Y)\ ;\\ &r_{31} = \cos(x,Z)\ ;\ r_{32} = \cos(y,Z)\ ;\ r_{33} = \cos(z,Z)\ . \end{aligned} \tag{A.16}$$

Dacă se exprimă pătratul distanţei de la originea O la un punct A (fig. A.3)

$$OA^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

şi se ţine seama de relaţiile (A.14), prin identificarea coeficienţilor lui x^2, y^2, z^2 cu 1 şi a celorlalţi coeficienţi cu 0 se obţin egalităţile:

$$\begin{aligned} &r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 = 1\ ;\ r_{11}\,r_{12} + r_{21}\,r_{22} + r_{31}\,r_{32} = 0\\ &r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 = 1\ ;\ r_{12}\,r_{13} + r_{22}\,r_{23} + r_{32}\,r_{33} = 0\\ &r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 = 1\ ;\ r_{11}\,r_{13} + r_{21}\,r_{23} + r_{31}\,r_{33} = 0 \end{aligned} \tag{A.17}$$

sau

$$\sum_{i=1}^{3} r_{ij} r_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{pentru } j = k \\ 0 & \text{pentru } j \neq k \end{cases}\ ,\quad \text{unde}\quad j = 1,2,3\ ;\quad k = 1,2,3\ .$$

Acestea sunt cele 6 **condiţii de ortogonalitate** pe care trebuie să le îndeplinească mărimile r_{ij} . Prin urmare, deşi matricea de rotaţie conţine 9 elemente, ea va depinde numai de 3 parametri independenţi, care se pot alege în diferite moduri (după cum se va vedea în paragraful următor).

Dacă se consideră acum transformarea inversă, adică se consideră sistemul $Oxyz$ fixat şi sistemul $OXYZ$ rotit, relaţiile dintre coordonatele x,y,z şi X,Y,Z se pot exprima sub forma:

$$\begin{cases} x = r_{11}X + r_{21}Y + r_{31}Z \\ y = r_{12}X + r_{22}Y + r_{32}Z \\ z = r_{13}X + r_{23}Y + r_{33}Z \end{cases} \tag{A.18}$$

având în vedere semnificaţiile cosinusurilor directoare r_{ij} (A.16)

Ţinând seama de notaţiile matriceale precizate anterior, relaţiile (A.18) se pot reprezenta simplificat prin:

$$x = R^{\mathrm{T}} X \tag{A.19}$$

(unde R^{T} este transpusa matricei de rotaţie R).

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte, din relaţia (A.15) se poate deduce:

$$x = R^{-1} X$$

şi, prin comparaţie cu (A.19) rezultă:

$$R^{-1} = R^{T} \ . \qquad \text{(A.20)}$$

Această proprietate este caracteristică matricelor ortogonale şi prin urmare **matricea de rotaţie este o matrice ortogonală.** Pe lângă relaţia (A.20) şi condiţiile de ortogonalitate (A.17), matricea de rotaţie (ca matrice ortogonală) mai are următoarele proprietăţi:

-determinantul matricei R (ca şi al matricelor R^T şi R^{-1}) are valoarea ± 1, adică:

$$|R| = |R^T| = |R^{-1}| = \pm 1$$

cu precizarea că semnul va fi " + " când cele două sisteme de coordonate au aceeaşi dispunere şi (evident) va fi " – " în caz contrar;

- fiecare element al matricei de rotaţie este egal cu complementul său algebric (cofactorul):

$$r_{11} = r_{22}\, r_{33} - r_{23}\, r_{32}$$
$$r_{12} = -(r_{21}\, r_{33} - r_{23}\, r_{31}) \ , \text{etc.} \qquad \text{(A.21)}$$

- între elementele liniilor matricei R există relaţii de acelaşi tip cu (A.17), având în vedere că şi matricea transpusă este ortogonală:

$$\begin{aligned} r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{13}^2 &= 1 \ ; \ r_{11}\, r_{21} + r_{12}\, r_{22} + r_{13}\, r_{23} = 0 \\ r_{21}^2 + r_{22}^2 + r_{23}^2 &= 1 \ ; \ r_{21}\, r_{31} + r_{22}\, r_{32} + r_{23}\, r_{33} = 0 \\ r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2 &= 1 \ ; \ r_{11}\, r_{31} + r_{12}\, r_{32} + r_{13}\, r_{33} = 0 \end{aligned} \qquad \text{(A.22)}$$

a_2 . Formarea matricei ortogonale în funcţie de 3 din elementele sale

După cum s-a arătat anterior, matricea de rotaţie depinde de 3 parametri independenţi, care pot fi consideraţi în diferite moduri. Astfel, se pot considera ca parametri independenţi chiar 3 din elementele matricei, de exemplu cele situate deasupra diagonalei principale (r_{12}, r_{13}, r_{23}), celelalte 6 elemente obţinându-se pe baza condiţiilor de ortogonalitate (A.17) şi a proprietăţilor matricelor ortogonale (A.21,A.22).

Pentru a urmări mai uşor modul (şi ordinea) în care se determină aceste elemente, se prezintă forma dezvoltată a matricei R, unde sublinierile marchează etapa în care se obţine fiecare element:

Scanned with OKEN Scanner

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

Astfel, într-o primă etapă se calculează r_{11} şi r_{33}, având în vedere că suma pătratelor elementelor pe linii şi pe coloane trebuie să fie egală cu *1*:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \sqrt{1 - r_{12}^2 - r_{13}^2}\ , \\ r_{33} &= \sqrt{1 - r_{13}^2 - r_{23}^2}\ . \end{aligned} \qquad \text{(A.23)}$$

Referitor la semnul radicalului, trebuie precizat că el nu a fost specificat, fiind " + " în cazul cel mai frecvent al sistemelor de aceeaşi dispunere, când elementele de pe diagonala principală a matricei R sunt pozitive. În celelalte situaţii, semnul va fi adaptat corespunzător.

În continuare, se determină r_{21} şi r_{22} pe baza relaţiilor:

$$\begin{cases} r_{11}r_{21} + r_{12}r_{22} + r_{13}r_{23} = 0 \\ r_{33} = r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} \end{cases}$$

care formează un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute.

Deducând r_{22} din cea de-a doua relaţie:

$$r_{22} = \frac{r_{33} + r_{12}r_{21}}{r_{11}} \qquad \text{(A.24)}$$

şi substituind în prima, se obţine:

$$r_{21} = \frac{-r_{12}r_{33} - r_{11}r_{13}r_{23}}{1 - r_{13}^2}\ . \qquad \text{(A.25)}$$

Evident, r_{22} se va putea calcula numai după obţinerea lui r_{21}.

În sfârşit, în cea de a treia etapă se determină r_{31} şi r_{32} pe baza proprietăţilor (A.21):

$$\begin{aligned} r_{31} &= r_{12}r_{23} - r_{13}r_{22}\ , \\ r_{32} &= r_{13}r_{21} - r_{11}r_{23}\ . \end{aligned} \qquad \text{(A.26)}$$

Trebuie subliniată necesitatea determinării celor 6 elemente ale matricei R în ordinea specificată, având în vedere că în fiecare etapă mărimile corespunzătoare se calculează pe baza celor obţinute în etapa (sau etapele) dinainte.

Scanned with OKEN Scanner

În ceea ce priveşte definirea elementelor de deasupra diagonalei principale (r_{12}, r_{13}, r_{23}) considerate cunoscute, trebuie menţionat că în cazul rotaţiilor mici (tipic în aerofotogrammetrie) se poate considera:

$$\begin{aligned} r_{12} &= -d\kappa \\ r_{13} &= +d\varphi \\ r_{23} &= -d\omega \end{aligned} \qquad \text{(A.27)}$$

prin analogie cu matricea rotaţiilor diferenţiale (A.35) dar, spre deosebire de aceasta, aici se determină o matrice strict ortogonală.

a3. Determinarea rotaţiei spaţiale prin 3 rotaţii plane

Un alt mod de definire a matricei de rotaţie constă în determinarea celor 9 cosinusuri directoare în funcţie de 3 rotaţii plane ω, φ şi κ respectiv în jurul axelor x, y şi z. În acest caz deci, cei 3 parametri independenţi apar implicit în elementele matricei R.

Considerând sistemul de referinţă $OXYZ$ şi sistemul rotit $Oxyz$ (ambele de dispunere pozitivă) şi reprezentând separat cele 3 rotaţii (definite pozitiv), se pot deduce relaţiile corespunzătoare acestor 3 cazuri:

- rotaţia ω (fig. A.4)

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y\cos\omega - z\sin\omega \\ Z = z\cos\omega + y\sin\omega \end{cases}$$

adică

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{sau}$$

$$X = R_\omega\, x \qquad \text{(A.28)}$$

- rotaţia φ (fig. A.5)

$$\begin{cases} X = x\cos\varphi + z\sin\varphi \\ Y = y \\ Z = z\cos\varphi - x\sin\varphi \end{cases}$$

adică

Scanned with OKEN Scanner

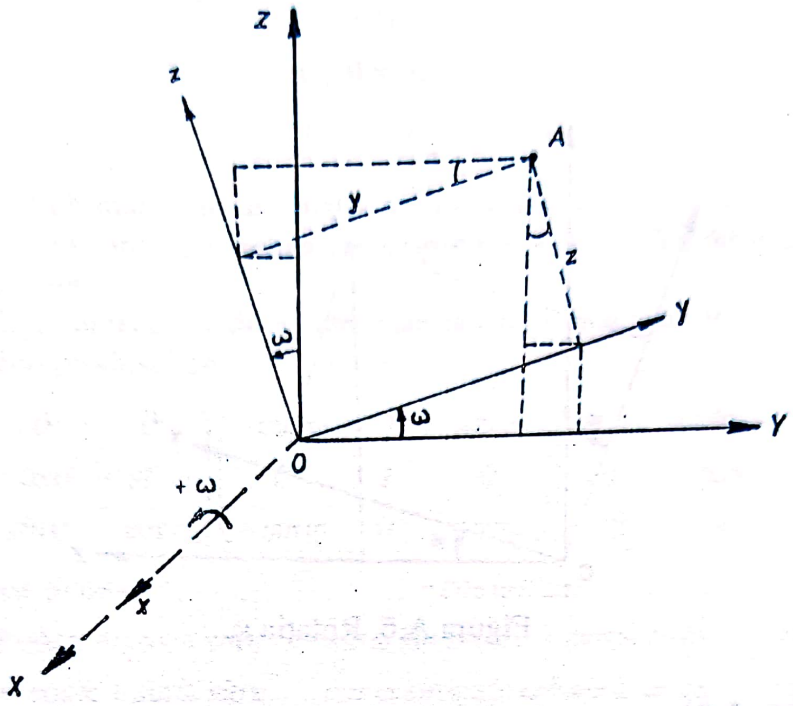

Figura A.4. Rotaţia ω.

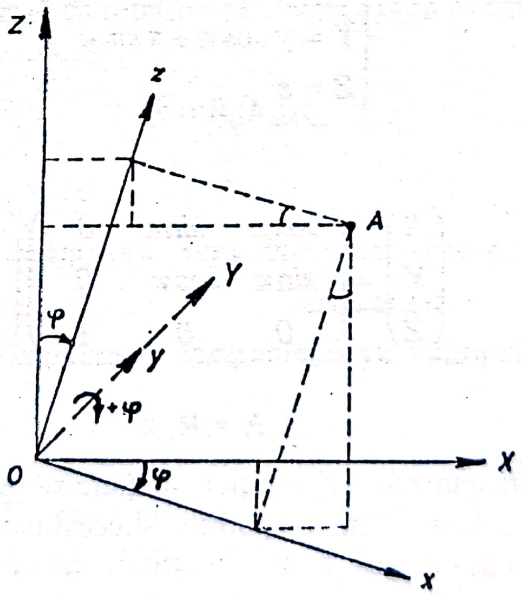

Figura A.5. Rotaţia φ.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{sau}$$

$$X = R_\varphi \, x \, . \qquad \text{(A.29)}$$

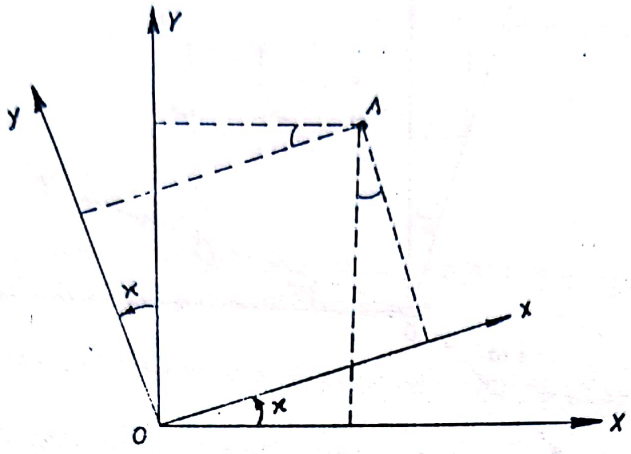

Figura A.6. Rotaţia κ.

- rotaţia κ (fig. A.6)

$$\begin{cases} X = x\cos\kappa - y\sin\kappa \\ Y = y\cos\kappa + x\sin\kappa \\ Z = z \end{cases}$$

adică

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa & 0 \\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ sau}$$

$$X = R_\kappa x \, . \qquad \text{(A.30)}$$

Matricea R corespunzătoare rotaţiei spaţiale se va obţine ca produs al celor 3 rotaţii plane, considerate într-o anumită succesiune. Astfel, presupunând că rotaţiile se efectuează în ordinea κ, φ, ω; coordonatele transformate în cele 3 etape succesive (marcate cu un indice superior) vor fi date de relaţiile:

$$X^{(1)} = R_\kappa x \quad , \quad X^{(2)} = R_\varphi X^{(1)} \quad , \quad X^{(3)} = R_\omega X^{(2)} \, .$$

În consecinţă, vectorul X obţinut în urma celor 3 rotaţii se va putea exprima în funcţie de vectorul x, compunând aceste relaţii:

Scanned with OKEN Scanner

$$X = X^{(3)} = R_\omega X^{(2)} = R_\omega R_\varphi X^{(1)} = R_\omega R_\varphi R_\kappa x = R x ,$$

de unde rezultă

$$R = R_\omega R_\varphi R_\kappa \quad . \tag{A.31}$$

Se observă că matricele de rotaţie se înmulţesc în ordine inversă efectuării rotaţiilor. Trebuie remarcat de asemenea că produsul a 3 matrice ortogonale este tot o matrice ortogonală.

Expresiile cosinusurilor directoare care definesc matricea R în forma (A.31) se obţin efectuând produsul celor 3 matrice:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa & 0 \\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\kappa & -\cos\varphi\sin\kappa & \sin\varphi \\ \sin\omega\sin\varphi\cos\kappa + \cos\omega\sin\kappa & -\sin\omega\sin\varphi\sin\kappa + \cos\omega\cos\kappa & -\sin\omega\cos\varphi \\ -\cos\omega\sin\varphi\cos\kappa + \sin\omega\sin\kappa & \cos\omega\sin\varphi\sin\kappa + \sin\omega\cos\kappa & \cos\omega\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{A.32}$$

Dacă se presupune însă că rotaţiile se efectuează în ordinea κ, φ, ω, matricea de rotaţie R va fi dată de produsul:

$$R = R_\varphi R_\omega R_\kappa \tag{A.33}$$

şi va avea forma:

$$R = \begin{pmatrix} \sin\varphi\sin\omega\sin\kappa + \cos\varphi\cos\kappa & \sin\varphi\sin\omega\cos\kappa - \cos\varphi\sin\kappa & \sin\varphi\cos\omega \\ \cos\omega\sin\kappa & \cos\omega\cos\kappa & -\sin\omega \\ \cos\varphi\sin\omega\sin\kappa - \sin\varphi\cos\kappa & \cos\varphi\sin\omega\cos\kappa + \sin\varphi\sin\kappa & \cos\varphi\cos\omega \end{pmatrix} \tag{A.34}$$

Prin urmare, pentru altă succesiune a rotaţiilor se obţin alte expresii ale cosinusurilor directoare, deoarece produsul matriceal nu este comutativ. Se pot determina astfel 6 variante ale matricei de rotaţie spaţială după numărul de permutări corespunzătoare celor 3 rotaţii plane (P= 3! =6). Adică, aceeaşi rotaţie spaţială poate fi exprimată în 6 moduri distincte în funcţie de 3 rotaţii plane. Mărimile acestor rotaţii vor diferi de la un caz la altul fiind definite diferit (adică, rotaţia ω de exemplu nu este aceeaşi în situaţiile în care este rotaţie primară, secundară sau terţiară), deşi rotaţia totală (spaţială) va fi acecaşi. Astfel, presupunând dată o anumită matrice de rotaţie R (cu anumite valori ale

cosinusurilor directoare r_{ij}), se pot determina mărimile celor 3 rotaţii plane corespunzătoare celor 6 forme ale matricei R. Pentru exemplificare, din cele două variante prezentate anterior (A.32 şi A.34) se pot deduce mărimile:

$$tg\,\omega = \frac{-r_{23}}{r_{33}} \quad , \quad sin\,\varphi = r_{13} \quad , \quad tg\,\kappa = \frac{-r_{12}}{r_{11}} \qquad \text{, respectiv}$$

$$sin\,\omega = -r_{23} \quad , \quad tg\,\varphi = \frac{r_{13}}{r_{33}} \quad , \quad tg\,\kappa = \frac{r_{21}}{r_{22}} \quad .$$

După cum se poate observa, pentru ca rotaţia ω să fie aceeaşi, ar trebui ca r_{33} să fie egal cu $cos\ \omega$; de asemenea, pentru ca rotaţia φ să fie aceeaşi, ar trebui ca r_{33} să fie egal cu $cos\ \varphi$; dar, în ambele variante $r_{33} = cos\ \omega\ cos\ \varphi$; în ceea ce priveşte rotaţia κ, pentru a fi aceeaşi în ambele variante ar trebui ca $r_{11}r_{21} + r_{12}r_{22}$ să fie zero, dar din (A.22) rezultă că $r_{11}r_{21} + r_{12}r_{22} = - r_{13}r_{23} \neq 0$.

Pe de altă parte; trebuie remarcat că în cazul transformării inverse (definită de A.19), matricea de rotaţie se obţine conform regulii de transpunere a unui produs matriceal. Astfel, pentru cele două variante dezvoltate anterior (A.31 respectiv A.33) rezultă:

$$R^T = \left(R_\omega R_\varphi R_\kappa\right)^T = R_\kappa^T R_\varphi^T R_\omega^T \qquad \text{, respectiv}$$

$$R^T = \left(R_\varphi R_\omega R_\kappa\right)^T = R_\kappa^T R_\omega^T R_\varphi^T \quad .$$

Prin urmare, celor 6 forme ale matricei de rotaţie R le vor corespunde 6 forme ale matricei R^T.

În fine, trebuie menţionat că în locul rotaţiilor ω, φ şi κ se pot defini şi alte unghiuri (de exemplu în aerofotogrametrie se mai utilizează înclinarea fotogramei ν, rotaţia în planul fotogramei κ şi rotaţia α în planul XY) şi în consecinţă se pot determina şi alte forme ale matricei de rotaţie.

a4. Matricea rotaţiilor diferenţiale

Un caz aparte îl reprezintă rotaţiile mici, caz ce apare îndeosebi în aerofotogrammetrie şi are o deosebită importanţă pentru dezvoltările teoretice din acest domeniu. Astfel, având în vedere că pentru rotaţii mici, notate generic cu $d\theta$ (unde $\theta = \omega, \varphi, \kappa$), se pot considera aproximaţiile:

$$sin\ d\theta \approx d\theta \qquad \text{(în radiani)} \ ,$$
$$cos\ d\theta \approx 1 \ ,$$

Scanned with OKEN Scanner

matricea de rotaţie va căpăta o formă particulară numită **matricea rotaţiilor diferenţiale:**

$$dR = \begin{pmatrix} 1 & -d\kappa & d\varphi \\ d\kappa & 1 & -d\omega \\ -d\varphi & d\omega & 1 \end{pmatrix} \qquad (A.35)$$

Trebuie remarcat că forma matricei dR (A.35) este unică, indiferent de matricea R din care provine. Adică, în oricare din cele 6 forme ale matricei R se introduc aproximaţiile menţionate, se obţine aceeaşi matrice dR în forma (A.35).

Pe de altă parte, se observă că matricea dR poate fi scrisă ca sumă a matricei unitate I cu o matrice antisimetrică:

$$dR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d\kappa & d\varphi \\ d\kappa & 0 & -d\omega \\ -d\varphi & d\omega & 0 \end{pmatrix} = I + dR_A \qquad (A.36)$$

Având în vedere că elementele matricei de rotaţie R (în orice formă) nu sunt liniare în raport cu cei 3 parametri independenţi, importanţa matricei dR (A.35) constă în aceea că ea reprezintă **forma liniarizată a matricei de rotaţie** şi este utilizată în numeroase dezvoltări teoretice (în vederea obţinerii unor ecuaţii liniare).

Aproximările prin care a fost obţinută se reflectă în aceea că matricea dR (A.35) nu mai satisface riguros condiţiile de ortogonalitate (A.17), ceea ce se poate observa uşor, şi deci nu mai este strict ortogonală.

b. Transformarea conformă în spaţiul tridimensional

b_1. Forma generală a transformării conforme spaţiale

Această transformare (numită şi transformare ortogonală spaţială) reprezintă o similitudine (asemănare) şi conţine 7 parametri independenţi: 3 translaţii X_o, Y_o, Z_o (reprezentând coordonatele originii sistemului arbitrar în raport cu cel de referinţă), factorul de scară m şi 3 rotaţii (de exemplu ω, φ şi κ) conţinute în matricea de rotaţie spaţială R.

Transformarea conformă spaţială (fig. A.7) se poate exprima prin relaţiile:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (A.37)$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, având în vedere convenţia de notare specificată anterior,

$$X = X_o + m\,R\,x \quad . \tag{A.38}$$

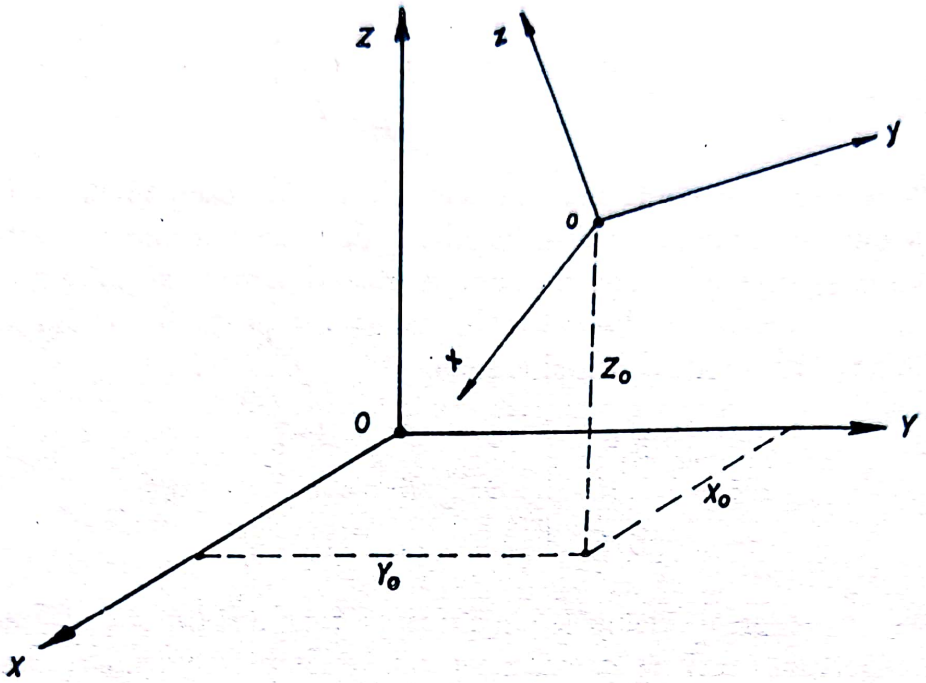

Figura A.7. Transformarea conformă spaţială.

În cazul transformării inverse, presupunând sistemul *oxyz* fixat şi *OXYZ* sistem arbitrar, din relaţia (A.38) rezultă:

$$x = \frac{1}{m} R^{\mathrm{T}} (X - X_o) \tag{A.39}$$

(ţinând seama de A.20).

Dacă se notează

$$x_o = \frac{1}{m} R^{\mathrm{T}} X_o \ ,$$

relaţia (A.39) devine:

$$x = \frac{1}{m} R^{\mathrm{T}} X - x_o \quad . \tag{A.40}$$

Având în vedere că transformarea conformă spaţială conţine 7 parametri, pentru determinarea acestora vor trebui cunoscute coordonatele planimetrice X, Y pentru două puncte (cât mai depărtate) şi cotele Z pentru trei puncte (necoliniare şi cât mai departate) precum şi coordonatele x, y, z ale tuturor acestor puncte.

Scanned with OKEN Scanner

b_2. Forma liniarizată a transformării conforme tridimensionale

În forma (A.37), transformarea conformă spațială nu este liniară în raport cu 4 din cei 7 parametri. Pentru a determina însă parametrii necunoscuți, va trebui să se formeze un sistem de ecuații liniare. În consecință, va fi necesară utilizarea unei forme liniarizate a acestei transformări. Având în vedere că în acest caz parametrii apar sub forma diferențială (reprezentând deci corecții), vor trebui cunoscute valori aproximative ale acestor parametri pe baza cărora se va face o transformare preliminară de forma (A.37). Prin urmare, coordonatele x,y,z care vor interveni în relațiile liniarizate vor fi foarte apropiate de coordonatele X,Y,Z.

În consecință, se vor putea considera:

- în locul factorului de scară $m \rightarrow 1+dm$,
- în locul matricei de rotație $R \rightarrow I+dR_A$,
- în locul translațiilor $X_o,\ Y_o,\ Z_o \rightarrow dX_o,\ dY_o, dZ_o$.

Trebuie remarcat că înlocuirea translațiilor cu corecții diferențiale nu este obligatorie, acestea intervenind liniar în relațiile (A.37) și deci transformarea preliminară menționată nu trebuie să conțină și translațiile, deoarece acestea se pot obține prin relațiile liniarizate. Totuși, înlocuirea acestor mărimi prin corecțiile corespunzătoare asigură omogenitatea valorilor și în continuare se va avea în vedere această situație.

Făcând deci înlocuirile menționate, relațiile (A.37) devin:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dX_o \\ dY_o \\ dZ_o \end{pmatrix} + (1+dm) \begin{pmatrix} 1 & -d\kappa & d\varphi \\ d\kappa & 1 & -d\omega \\ -d\varphi & d\omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{(A.41)}$$

sau

$$X = dX_o + (1 + dm)\,(I + dR_A)\,x \quad . \qquad \text{(A.42)}$$

Dezvoltând produsul și neglijând termenul de ordinul II diferențial $dm \cdot dR_A$, se obține:

$$X = dX_o + x + dm\,x + dR_A\,x \quad . \qquad \text{(A.43)}$$

Dacă se notează

$$dX = X - x$$

(având în vedere că mărimile x obținute în urma transformării preliminare sunt destul de apropiate de X) și se dezvoltă produsul $dR_A \cdot x$, rezultă:

$$\begin{cases} dX = dX_o + x\,dm + z\,d\varphi - y\,d\kappa \\ dY = dY_o + y\,dm - z\,d\omega + x\,d\kappa \\ dZ = dZ_o + z\,dm + y\,d\omega - x\,d\varphi \end{cases} \qquad (A.44)$$

sau matriceal, punând în evidenţă corecţiile celor 7 parametri ai transformării,

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 & z & -y \\ 0 & 1 & 0 & y & -z & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & z & y & -x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_o \\ dY_o \\ dZ_o \\ dm \\ d\omega \\ d\varphi \\ d\kappa \end{pmatrix} \qquad (A.45)$$

Ca şi în cazul general, pentru determinarea celor 7 corecţii vor trebui cunoscute coordonatele X, Y pentru două puncte (cât mai depărtate) şi cotele Z pentru trei puncte (necoliniare şi cât mai depărtate), precum şi coordonatele x, y, z ale tuturor acestor puncte. În cazul coordonatelor obţinute prin măsuratori şi în consecinţă al aplicării metodei pătratelor minime, vor trebui cunoscute (în cele două sisteme) mai multe coordonate decât cele menţionate.

Pe de altă parte trebuie remarcat că, deoarece relaţiile (A.44) spre deosebire de (A.37) nu mai sunt riguroase (intervenind aproximări), soluţia va fi iterativă, corectând succesiv valorile aproximative ale parametrilor transformării.

c. Transformarea tridimensională prin polinoame de ordinul II

Având în vedere că prezintă interes situaţiile cu aplicabilitate în fotogrammetrie, vor fi prezentate aici 3 cazuri:

c_1. Transformarea simultană a celor 3 coordonate

În acest caz, relaţiile conţin parametri comuni:

$$\begin{cases} X = a_o + a_1x + a_2x^2 - y(b_1 + 2b_2x) - z(c_1 + 2c_2x) \\ Y = b_o + b_1x + b_2x^2 + y(a_1 + 2a_2x) + z(d_1 + d_2x) \\ Z = c_o + c_1x + c_2x^2 - y(d_1 + d_2x) + z(a_1 + 2a_2x) \end{cases} \qquad (A.46)$$

sau, în notaţie matriceală,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x & -y & -z & 0 & x^2 & -2xy & -2xz & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y & x & 0 & z & 2xy & x^2 & 0 & xz \\ 0 & 0 & 1 & z & 0 & x & -y & 2xz & 0 & x^2 & -xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_o \\ b_o \\ c_o \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

După cum se observă, această transformare conține 11 parametri necunoscuți și deci, pentru aplicarea metodei pătratelor minime (presupunând coordonatele obținute din măsurători), vor trebui determinate (în cele două sisteme) $n \geq 4$ puncte (fiecare punct implicând 3 ecuații).

c_2. Transformarea separată a coordonatelor planimetrice și altimetrice

În acest caz, doar primele două relații conțin parametri comuni:

$$\begin{cases} X = a_o + a_1 x + a_2 x^2 - y(b_1 + 2b_2 x) \\ Y = b_o + b_1 x + b_2 x^2 + y(a_1 + 2a_2 x) \end{cases} \qquad \text{(A.47)}$$

sau, în notație matriceală,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & -y & x^2 & -2xy \\ 0 & 1 & y & x & 2xy & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_o \\ b_o \\ a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Se poate observa (deși termenii sunt altfel ordonați) că aceste relații sunt identice cu (A.12) de la transformarea plană neliniară și conțin primii termeni (adică, cei fără z) din relațiile corespunzătoare ale sistemului (A.46). Având în vedere că numărul parametrilor necunoscuți este 6, pentru determinarea lor prin

metoda pătratelor minime vor fi necesare $n > 3$ puncte (cu coordonate plane în cele două sisteme).

În ceea ce priveşte transformarea altimetrică, relaţia corespunzătoare este:

$$Z = c_o + c_1 x + c_2 x^2 + y(c_3 + c_4 x) \quad , \tag{A.48}$$

sau matriceal

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & y & xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_o \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

Pentru determinarea celor 5 parametri necunoscuţi prin metoda pătratelor minime vor fi necesare $n > 5$ puncte.

c_3. Transformarea independentă a celor 3 coordonate

În acest caz cele 3 relaţii vor fi independente, neconţinând parametri comuni:

$$\begin{aligned} X &= a_o + a_1 x + a_2 x^2 + y(a_3 + a_4 x) \\ Y &= b_o + b_1 x + b_2 x^2 + y(b_3 + b_4 x) \\ Z &= c_o + c_1 x + c_2 x^2 + y(c_3 + c_4 x) \end{aligned} \tag{A.49}$$

sau, în notaţie matriceală,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & y & xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

şi similar pentru Y şi Z, unde va diferi doar vectorul parametrilor necunoscuţi.

Prin urmare, în acest caz matricea coeficienţilor va fi aceeaşi pentru X, Y şi Z, determinarea parametrilor transformării fiind mult uşurată. În cazul aplicării metodei pătratelor minime, vor fi necesare $n > 5$ puncte cu coordonate cunoscute în cele două sisteme.

Scanned with OKEN Scanner

A.3. Proprietăţi, relaţii şi teoreme fundamentale din geometria proiectivă utilizate în fotogrammetrie.

În primul rând, trebuie arătat că geometria proiectivă reconsideră geometria euclidiană, completând-o cu elementele de la infinit, astfel încât proprietăţile proiective nu fac nici o distincţie între aceste elemente şi cele de la distanţa finită. Elementele fundamentale ale geometriei proiective în spaţiul tridimensional sunt dreapta prciectivă, planul proiectiv şi spaţiul proiectiv rezultate prin completarea dreptei, planului şi spatiului euclidian, respectiv cu punctul, dreapta şi planul de la infinit.

Cu ajutorul elementelor fundamentale se pot obţine forme fundamentale de ordinul I, de ordinul II şi de ordinul III, după numărul parametrilor necesari pentru determinarea elementelor formei.

Astfel, ca forme fundamentale de ordinul I se pot menţiona:

- **punctuala**, ca totalitate a punctelor situate pe o dreaptă suport, fiecare punct fiind determinat de o coordonată - abscisă;
- **fasciculul de drepte** determinat de o punctuală şi un punct fix situat în afara ei (vârful fasciculului);
- **fasciculul de plane** determinat de o punctuală şi o dreaptă fixă (axa fasciculului) distinctă şi neparalelă în raport cu dreapta - suport a punctualei.

Formele fundamentale de ordinul II sunt:

- **planul punctat**, adică totalitatea punctelor situate într-un plan;
- **planul riglat**, adică totalitatea dreptelor coplanare;
- **stea de drepte** (fascicul spaţial de drepte) ce se obţine prin unirea unui punct fix exterior planului punctat cu mulţimea elementelor acestuia;
- **stea de plane**, adică totalitatea planelor determinate de un punct fix exterior planului riglat şi mulţimea dreptelor acestuia.

În fine, formele fundamentale de ordinul III sunt:

- **spaţiul punctat**, ca totalitate a punctelor sale;
- **spaţiul planat**, ca totalitate a planelor sale.

În ceea ce priveşte spaţiul riglat, deoarece pozitia unei drepte în spaţiu este determinată de 4 parametri, acesta va aparţine formelor de ordinul IV şi deci nu va prezenta interes în cele ce urmează.

Scanned with OKEN Scanner

A.3.1. Corespondenţa proiectivă între forme de ordinul I

a. Coordonate pe dreapta elementară, pe dreapta afină şi pe dreapta proiectivă

Se consideră o dreaptă (Δ) organizată ca axă (fig. A.8), având fixate un punct origine O şi un punct unitate U, astfel încât

$$\overline{OU} = +1 \tag{A.50}$$

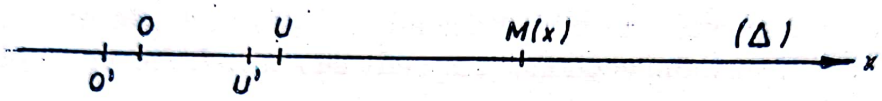

Figura A.8. Dreapta organizată ca axă.

Poziţia unui punct M pe (Δ) se poate defini prin **coordonata abscisă** x:

$$x = \frac{\overline{OM}}{\overline{OU}}$$

Dacă pe dreapta (Δ) în locul punctelor O şi U se vor considera alte două puncte O', respectiv U', satisfăcând de asemenea relaţia (A.50), punctul M va avea o altă abscisă x':

$$x' = \frac{\overline{O'M}}{\overline{O'U'}} .$$

Pentru a deduce legătura dintre x' şi x, se poate scrie:

$$x' = \frac{\overline{O'M}}{\overline{O'U'}} = \frac{\overline{O'O} + \overline{OM}}{\overline{O'U'}} = \frac{\overline{O'O}}{\overline{O'U'}} + \frac{\overline{OM}}{\overline{OU}} \cdot \frac{\overline{OU}}{\overline{O'U'}} = a_0 + x .$$

Dacă se are în vedere şi posibilitatea ca $\overline{OU}$ şi $\overline{O'U'}$ să fie de sens contrar, relaţia anterioară se poate scrie sub forma:

$$x' = a_0 + \varepsilon x , \tag{A.51}$$

unde $\varepsilon = \pm 1$.

O astfel de transformare conţine translaţie şi simetrie.

Dacă se consideră acum că punctele O si U, ca şi O' şi U' nu mai sunt supuse condiţiei (A.50), ci trebuie doar să fie distincte ($O \neq U$, respectiv $O' \neq U'$), urmând acelaşi raţionament se obţine:

$$x' = a_0 + a_1 x , \tag{A.52}$$

unde a_1 este finit şi diferit de zero.

Scanned with OKEN Scanner

Relaţia (A.52) defineşte **transformarea afină** pe dreaptă, iar cazul anterior (corespunzând dreptei elementare) poate fi considerat ca un caz particular pentru $a_1 = \pm 1$.

O proprietate importantă a transformării afine constă în aceea că menţine invariant **raportul simplu** a 3 puncte

$$\beta = (ABM) = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{a-x}{b-x} \quad , \tag{A.53}$$

unde a,b şi x sunt respectiv abscisele punctelor A,B (fixe) şi M (mobil), iar β se numeşte **coordonată baricentrică.**

Această coordonată (proprie geometriei dreptei afine) are deci (faţă de coordonata abscisă) avantajul de a rămâne invariantă la o schimbare de origine sau de unitate de măsură. De asemenea, trebuie menţionat că **raportul simplu este un invariant al proiecţiei paralele.**

Dacă se consideră acum pe (Δ) 3 puncte fixe A, B, C distincte ($A \neq B \neq C$) numite **puncte fundamentale** şi un punct mobil M, se poate defini ρ ca raport al coordonatelor baricentrice ale punctelor C şi M

$$\rho = (ABCM) = \frac{(ABC)}{(ABM)} = \frac{\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}}{\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}} \tag{A.54}$$

sau, notând cu a,b,c,x respectiv abscisele punctelor A,B,C,M,

$$\rho = (a,b,c,x) = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-x}{b-x} \quad . \tag{A.55}$$

Mărimea ρ reprezintă **coordonata proiectivă** a punctului M, în geometria dreptei proiective. Dacă se consideră ca abscise ale punctelor fundamentale ∞, 0 şi 1 (respectiv), prin trecere la limită se obţine $\rho = x$ şi deci coordonata abscisă reprezintă un caz particular al coordonatei proiective.

b. Raportul anarmonic şi raportul armonic

Mărimea ρ definită prin (A.54) şi (A.55) se numeşte **biraport** (fiind raportul a două raporturi simple) sau **raport anarmonic** al celor 4 puncte.

Deşi se pot forma $P = 4! = 24$ raporturi anarmonice (pentru 4 puncte date), doar 6 vor avea valori distincte, câte 4 fiind egale respectiv cu:

Scanned with OKEN Scanner

$$\rho \ , \frac{1}{\rho}, 1-\rho \ , \frac{1}{1-\rho}, \frac{\rho-1}{\rho}, \frac{\rho}{\rho-1} \ .$$

Principala proprietate a raportului anarmonic (cu aplicare directă în fotogrammetrie) constă în aceea că este un **invariant al proiecţiei conice.** Adică, raportul anarmonic al punctelor rezultate la intersecţia unui fascicul (având 4 raze) cu diferite drepte (ce nu trec prin vârful fasciculului) este constant (fig. A.9):

$$(ABCD) = (A'B'C'D') = \ldots = \rho \ .$$

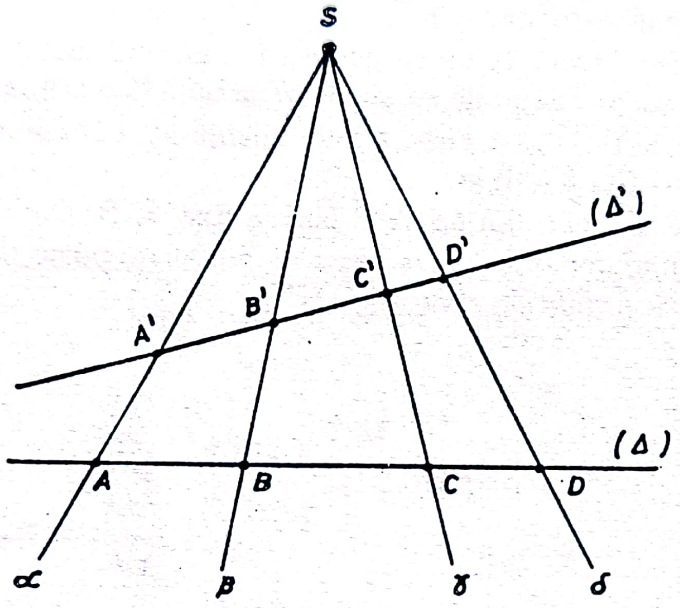

Figura A.9. Invarianţa raportului anarmonic în cazul proiecţiei conice.

Raportul armonic reprezintă un caz particular al raportului anarmonic pentru valoarea $\rho = -1$. În acest caz, punctele care formează o **diviziune armonică** sunt dispuse ca în figura A.10.

Figura A.10. Diviziunea armonică.

Dacă se consideră originea în punctul A ($a = 0$) se obţine:

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} \ , \qquad \text{(A.56)}$$

adică segmentul $\overline{AB}$ este **medie armonică** a segmentelor $\overline{AC}$ şi $\overline{AD}$.

Dacă se ia însă originea O la mijlocul segmentului $\overline{AB}$ ($b = -a$), rezultă:

$$\overline{OA}^2 = \overline{OC} \cdot \overline{OD} . \qquad \text{(A.57)}$$

adică segmentul $\overline{OA}$ este **medie geometrică** a segmentelor $\overline{OC}$ şi $\overline{OD}$.

Fiind dată pe dreapta (Δ) o diviziune armonică (fig. A.10), fasciculul obţinut prin unirea punctelor A,C,B,D cu un punct exterior S se numeşte **fascicul armonic**. Intersectat cu oricare alte drepte (netrecând prin S), acest fascicul va determina de asemenea diviziuni armonice.

c. Transformarea omografică

Această transformare conservă raportul anarmonic şi se mai numeşte **transformare proiectivă**. Pornind deci de la proprietatea $\rho = \rho'$, adică

$$(A'B'C'M') = (ABCM) ,$$

sau

$$(a',b',c',x') = (a,b,c,x) ,$$

se obţine (în urma dezvoltărilor corespunzătoare şi a unor notaţii simplificatoare) relaţia:

$$x' = \frac{\alpha_{11}x + \alpha_{12}}{\alpha_{21}x + \alpha_{22}} . \qquad \text{(A.58)}$$

Determinantul

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \qquad \text{(A.59)}$$

se numeşte **determinantul omografiei.**

Dacă $D \neq 0$, omografia este proprie, iar dacă $D = 0$, omografia se numeşte improprie. Pe de altă parte, se pot defini 3 tipuri de omografii numite generatoare, corespunzând următoarelor matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şi ale căror ecuaţii, ţinând seama de (A.58), vor fi respectiv:

$$x' = x + a_0 ,$$
$$x' = a_1 x ,$$
$$x' = \frac{1}{x} .$$

Primele două fac parte din grupul transformărilor afine de forma (A.52) şi reprezintă o translaţie, respectiv o modificare de scară, iar a treia este transformarea prin inversiune, care va fi dezvoltată ulterior (în paragraful A.3.4.).

Trebuie remarcat că transformarea omografică, deşi în forma (A.58), conţine 4 parametri, împărţind cu α_{22} şi notând

$$a_{11}=\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}},\quad a_{12}=\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}},\quad a_{21}=\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}},$$

se obţine:

$$x'=\frac{a_{11}x+a_{12}}{a_{21}x+1}. \tag{A.60}$$

Prin urmare, transformarea omografică depinde de 3 parametri independenţi pentru determinarea cărora vor trebui cunoscute 3 perechi de puncte corespondente (cu abscisele x, respectiv x').

d. Proiectivitatea între două punctuale cu baze distincte

După cum rezultă din paragraful anterior, o proiectivitate între două punctuale este determinată de trei perechi de puncte omologe. Legătura dintre abscisele x'_i ale punctelor A'_i aparţinând dreptei (Δ') şi abscisele x_i ale punctelor corespunzătoare A_i de pe (Δ) se exprima prin relaţia (A.60). Aceasta este echivalentă cu o relaţie biliniară în x şi x' de forma:

$$A\,x\,x'+B\,x+C\,x'+D=0 \tag{A.61}$$

numită **ecuaţia proiectivităţii.**

Având în vedere că proiectivitatea (în acest caz) este determinată de trei perechi de puncte corespondente, ecuaţia proiectivităţii poate fi exprimată (concret) printr-un determinant de ordinul IV:

$$\begin{vmatrix} xx' & x & x' & 1\\ x_1x'_1 & x_1 & x'_1 & 1\\ x_2x'_2 & x_2 & x'_2 & 1\\ x_3x'_3 & x_3 & x'_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

care, dezvoltat după prima linie, permite obţinerea coeficienţilor A,B,C,D din (A.61) prin calcularea complementilor algebrici ai mărimilor xx', x, x', 1 din această linie.

Scanned with OKEN Scanner

O proprietate importantă a punctualelor proiective este exprimată prin **teorema lui Pappus:** dacă pe două drepte (Δ) şi (Δ') se iau câte 3 puncte arbitrare A_1, A_2, A_3, respectiv A'_1, A'_2, A'_3, punctele rezultate prin unirea lor în diagonală U, V, W (fig. A.11) sunt coliniare. Această dreaptă se numeşte **axa proiectivităţii** (Δ_p) şi este fixă pentru o anumită proiectivitate. Cu ajutorul ei se pot determina oricare alte perechi de puncte corespondente M, M'.

Un caz particular îl reprezintă **punctualele asemenea,** care se caracterizează prin aceea că punctele lor de la infinit sunt omologe, ecuaţia proiectivităţii devenind:

$$B x + C x' + D = 0 . \qquad \text{(A.62)}$$

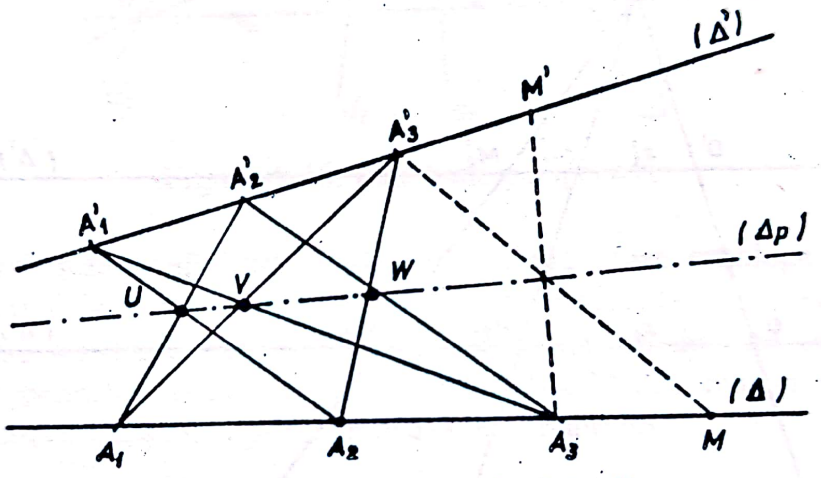

Figura A.11. Axa proiectivităţii.

O astfel de proiectivitate este determinată de două perechi de puncte corespondente, iar ecuaţia proiectivităţii se poate deduce prin dezvoltarea după prima linie a determinantului

$$\begin{vmatrix} x & x' & 1 \\ x_1 & x'_1 & 1 \\ x_2 & x'_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Dacă originile absciselor se consideră în două puncte omologe, relaţia (A.62) devine:

$$B x + C x' = 0 ,$$

sau

$$x' = k x . \qquad \text{(A.63)}$$

De exemplu, dacă se consideră două drepte fixe (Δ) şi (Δ′) paralele, iar printr-un punct din plan, S, exterior lor se duce o secantă variabilă care intersectează (Δ) si (Δ′) în M_i şi M'_i, acestea descriu pe cele două drepte fixe diviziuni asemenea (fig. A.12).

După cum se observă, dacă se consideră originile O şi O' pe secanta fixă δ_o se poate scrie:

$$\frac{x'_1}{x_1}=\frac{x'_2}{x_2}=\ldots=\frac{\overline{SO'}}{\overline{SO}}=k\,.$$

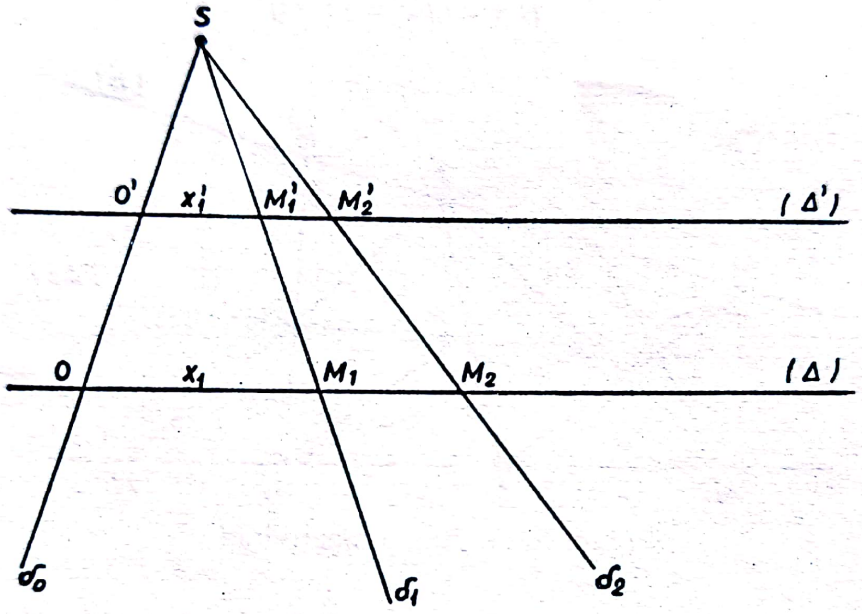

Figura A.12. Construirea diviziunilor asemenea.

Un alt caz particular (cu importanţă deosebită în fotogrammetrie) îl constituie **perspectivitatea.**

Două punctuale proiective care au un punct autoomolog sunt perspective, adică dreptele care unesc puncte omologe sunt concurente (fig. A.13).

e. Proiectivitatea între fascicule de drepte

După cum s-a arătat la începutul paragrafului A.3, fasciculul de drepte este tot o formă de ordinul I, fiecare rază δ_i fiind definită de un unghi α_i în raport cu o rază origine δ_o (fig. A.14), sau de coeficientul unghiular corespunzător m_i.

Astfel, o corespondenţă proiectivă între două fascicule cu vârfurile S şi S' se poate exprima printr-o legatură biliniară similară relaţiei (A.61), de forma:

$$A\,m\,m' + B\,m + C\,m' + D = 0\ , \qquad \text{(A.64)}$$

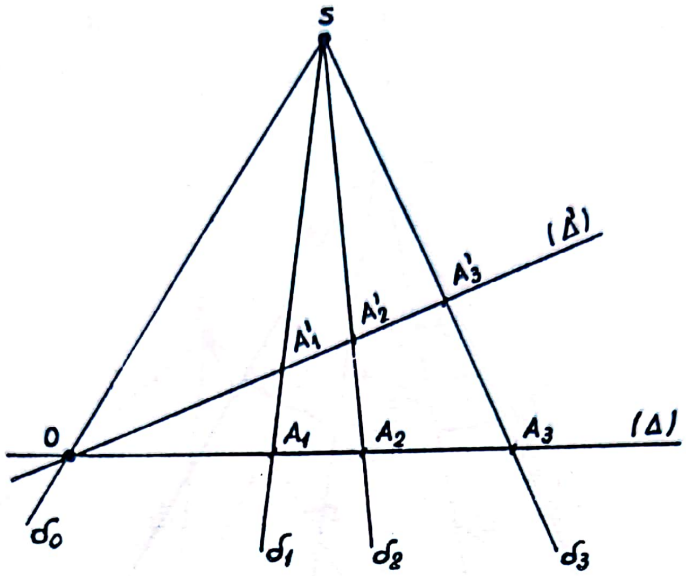

Figura A.13. Punctuale perspective.

unde m şi m' sunt coeficienţii unghiulari a două raze omologe. Asemănător cazului punctualelor proiective (din paragraful precedent), o proiectivitate între două fascicule de drepte este determinată de 3 perechi de raze corespondente. Acestea vor permite calculul coeficienţilor A,B,C,D din ecuaţia proiectivităţii (A.64) prin dezvoltarea după prima linie a determinantului

$$\begin{vmatrix} mm' & m & m' & 1 \\ m_1m'_1 & m_1 & m'_1 & 1 \\ m_2m'_2 & m_2 & m'_2 & 1 \\ m_3m'_3 & m_3 & m'_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

De asemenea, corespunzător axei proiectivităţii, în cazul fasciculelor se va putea determina centrul proiectivităţii C_p (fig. A.15) definit de 3 perechi de raze omologe δ_1, δ_2, δ_3, respectiv δ'_1, δ'_2, δ'_3 şi cu ajutorul acestuia se va putea obţine corespondenta δ'_i a oricărei raze δ_i (sau invers).

Dacă se intersectează cele 3 perechi de raze (care definesc proiectivitatea) conform următoarelor scheme:

$$\begin{matrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \delta'_1 & \delta'_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \delta_1 & \delta_3 \\ \delta'_1 & \delta'_3 \end{matrix}$$

rezultă punctele A,B şi respectiv C,D, iar la intersecţia dreptelor $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ se obţine centrul proiectivităţii C_p. Pentru determinarea corespondentei δ'_i a unei raze δ_i se foloseşte o schemă similară:

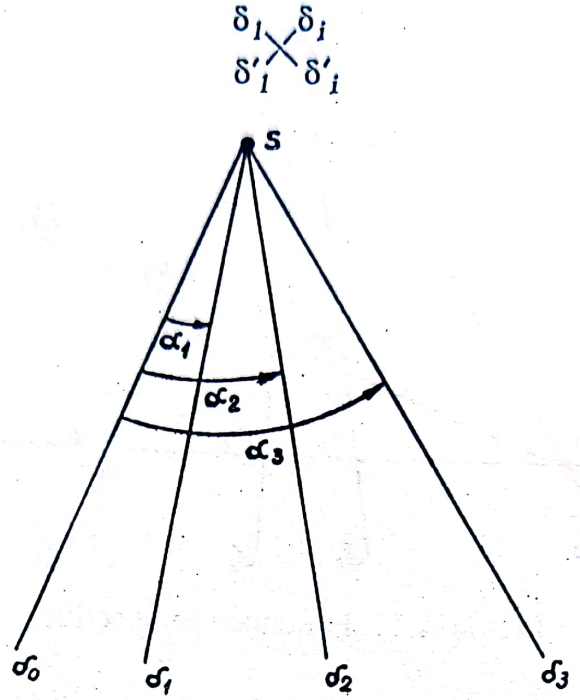

Figura A.14. Fascicul de drepte.

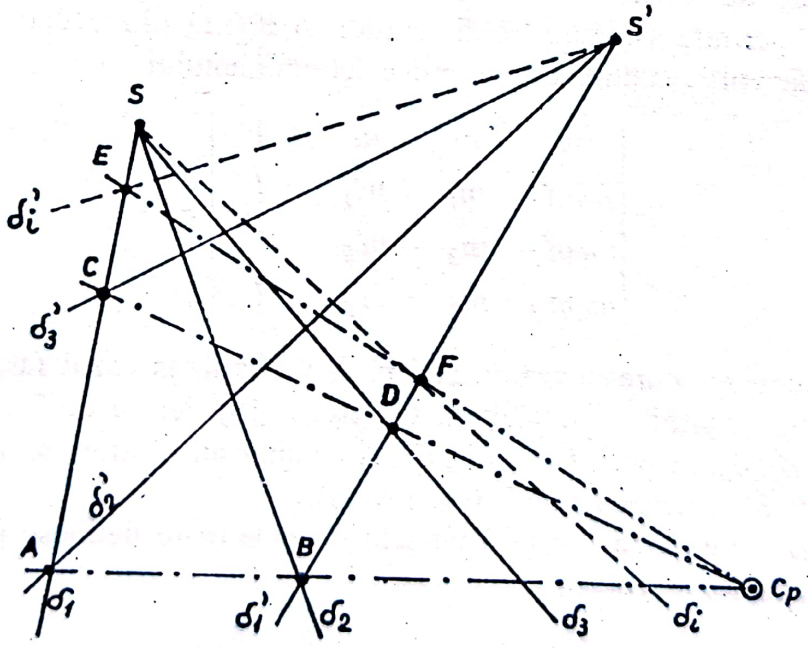

Figura A.15. Centrul proiectivităţii.

şi se ţine seama de faptul că dreapta $\overline{EF}$ va trebui să treacă prin C_p.

Un caz particular al corespondenţei proiective între fascicule îl constituie **perspectivitatea.**

Două fascicule proiective care au o rază autoomologă sunt perspective, adică razele omologe se intersectează în puncte coliniare (fig. A.16).

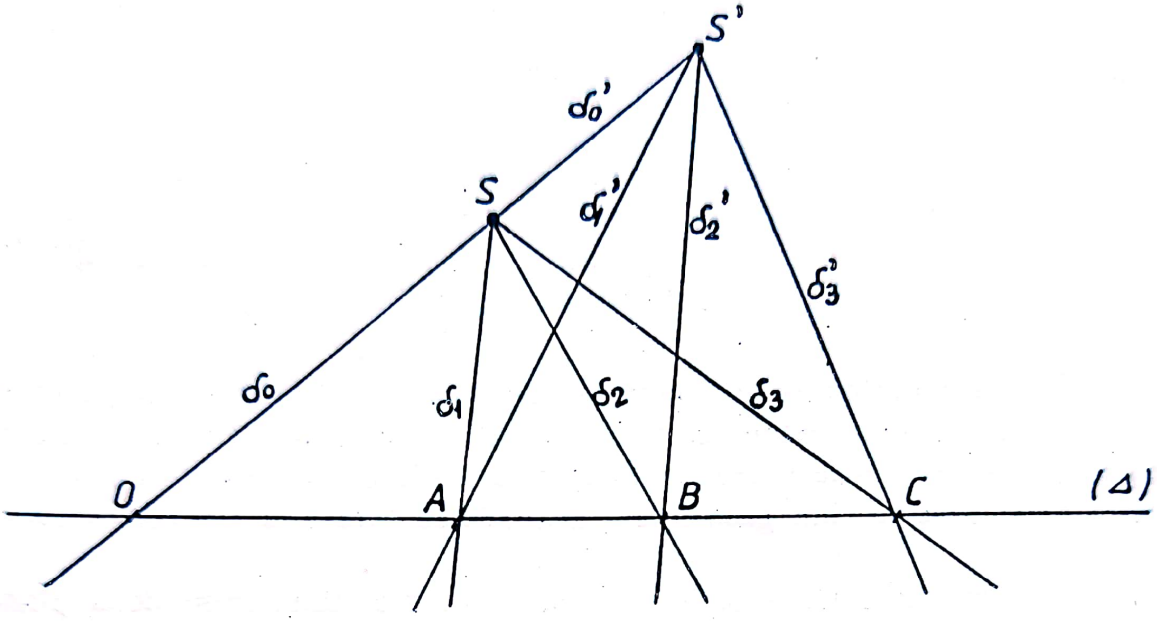

Figura A.16. Fascicule perspective.

A.3.2. Corespondenţa proiectivă între forme de ordinul II

Trebuie precizat întâi că va fi tratată aici doar corespondenţa omografică între două plane (deşi mai sunt şi alte forme de ordinul II).

Similar relaţiei (A.58) exprimând omografia în cazul formelor de ordinul I, transformarea omografică (proiectivă) între două plane va fi dată de relaţiile:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}}{\alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}} \\ y' = \dfrac{\alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}}{\alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}} \end{cases} \qquad \text{(A.65)}$$

De asemenea, determinantul

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

reprezintă determinantul omografiei.

Împărţind relaţiile (A.65) cu α_{33} şi notând

$$a_{11}=\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{33}}\ ,\ a_{12}=\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{33}}\ ,\ a_{13}=\frac{\alpha_{13}}{\alpha_{33}}\quad \text{etc.}$$

rezultă:

$$\begin{aligned} x'&=\frac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}}{a_{31}x+a_{32}y+1}\ ,\\ y'&=\frac{a_{21}x+a_{22}y+a_{23}}{a_{31}x+a_{32}y+1}\ . \end{aligned} \tag{A.66}$$

De aici se poate deduce că grupul omografiilor plane depinde de 8 parametri independenţi, pentru determinarea cărora vor trebui cunoscute 4 perechi de puncte omologe (cu coordonatele corespunzătoare). Condiţia $D \neq 0$ (pentru ca omografia să fie proprie) se exprimă geometric prin cerinţa ca 3 din cele 4 puncte să nu fie coliniare.

Un caz particular îl reprezintă **corespondenţa afină între două plane**, caracterizată ca o proiectivitate care conservă dreapta de la infinit. Aceasta implică $\alpha_{31}=\alpha_{32}=0$ şi deci

$$D=\alpha_{33}\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}\ ,$$

iar dacă $\alpha_{33}\neq 0$, condiţia $D\neq 0$ revine la

$$\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}=0\ . \tag{A.67}$$

În consecinţă, relaţiile (A.66) devin:

$$\begin{aligned} x'&=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}\ ,\\ y'&=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}\ . \end{aligned} \tag{A.68}$$

O afinitate este deci reprezentată prin transformări liniare de coordonate.

Deşi cu unele diferenţe de notaţii, se poate observa că aceste relaţii sunt identice cu (A.7) de la transformarea afină în plan (deoarece situaţia este similară, când se consideră planele suprapuse).

Se pot preciza de asemenea următoarele proprietăţi:

- afinitatea păstrează paralelismul;
- într-o afinitate, raportul segmentelor de pe drepte paralele este constant;
- o afinitate transformă ariile într-un raport constant, această constantă fiind valoarea determinantului (A.67), şi se numeşte **modulul transformării afine.**

Dacă transformarea afină păstrează invariant un punct (de exemplu originea), rezultă $a_{13} = a_{23} = 0$ şi relaţiile (A.68) devin:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y \ , \qquad y' = a_{21}x + a_{22}y \ , \tag{A.69}$$

similare cu (A.9) şi reprezintă o **transformare centro-afină.**

Un alt caz particular important, cu aplicabilitate directă în fotogrammetrie (ca de altfel şi cazul general) şi anume la redresarea fotogrammetrică, îl constituie **perspectivitatea.**

Fiind dată o omografie între două plane distincte Π şi Π', dacă dreptele care unesc puncte omologe trec printr-un punct fix S, proiectivitatea se numeşte (în acest caz) perspectivitate (fig. A.17). De asemenea, trebuie menţionat că punctul S se numeşte **centru perspectiv**, iar dreptele care trec prin acest punct formează o stea de drepte. Pe de altă parte, dreapta (Δ) de intersecţie a celor două plane este o dreaptă de puncte unite (autoomologe).

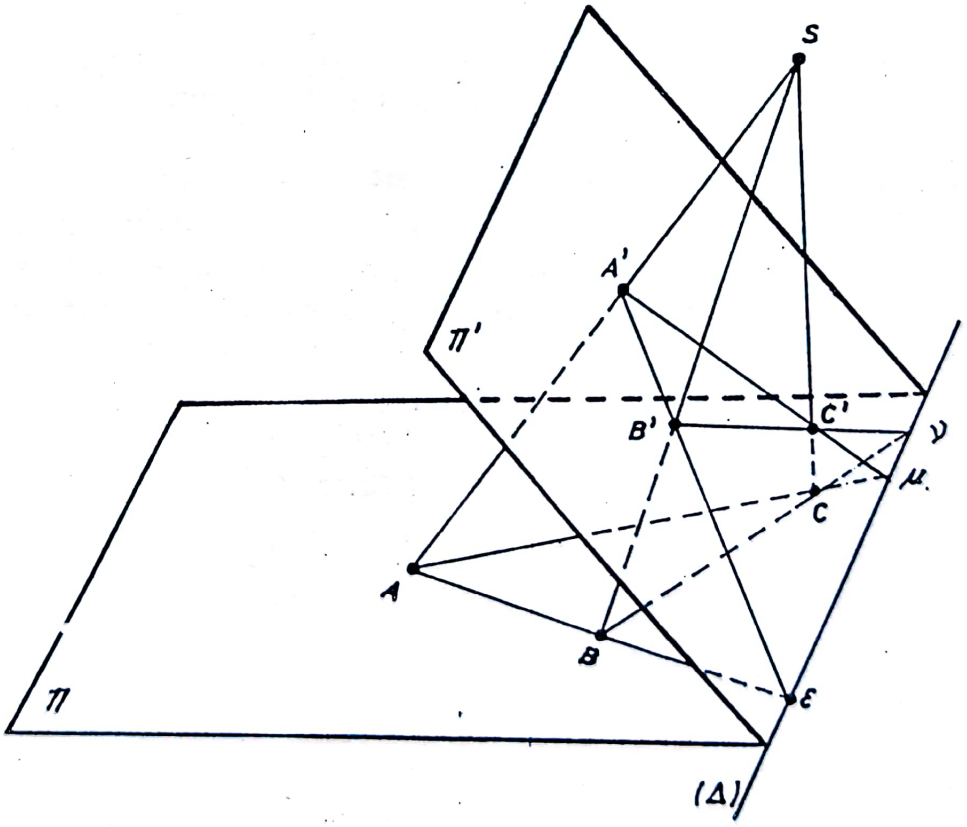

Figura A.17. Perspectivitatea între două plane.

Reciproc, dacă se dă o omografie între două plane Π şi Π' astfel încât dreapta lor de intersecţie (Δ) să fie o dreaptă de puncte unite, omografia este o perspectivitate.

A.3.3. Corespondenţa proiectivă între forme de ordinul III

Similar omografiilor tratate anterior, transformarea omografică (proiectivă) între forme de ordinul III va fi dată de relaţiile:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z+\alpha_{14}}{\alpha_{41}x+\alpha_{42}y+\alpha_{43}z+\alpha_{44}} \\ y' = \dfrac{\alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}z+\alpha_{24}}{\alpha_{41}x+\alpha_{42}y+\alpha_{43}z+\alpha_{44}} \\ z' = \dfrac{\alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}z+\alpha_{34}}{\alpha_{41}x+\alpha_{42}y+\alpha_{43}z+\alpha_{44}} \end{cases} \qquad (A.70)$$

iar determinantul omografiei va fi:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix}$$

Împărţind relaţiile (A.70) cu α_{44} şi notând

$$a_{11} = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{44}} \;,\; a_{12} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{44}} \;,\; a_{13} = \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{44}} \;,\; a_{14} = \frac{\alpha_{14}}{\alpha_{44}} \quad \text{etc.}$$

rezultă:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}}{a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+1} \\ y' = \dfrac{a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}}{a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+1} \\ z' = \dfrac{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}}{a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+1} \end{cases} \qquad (A.71)$$

Prin urmare, omografiile spaţiale formează un grup cu 15 parametri independenţi, pentru determinarea cărora vor trebui cunoscute 5 perechi de puncte omologe (cu coordonatele corespunzătoare). Condiţia $D \neq 0$ (pentru ca omografia să fie proprie) se exprimă geometric prin cerinţa ca din cele 5 puncte, 3 să nu fie coliniare şi 4 să nu fie coplanare.

Scanned with OKEN Scanner

Un caz particular îl reprezintă **corespondenţa afină**, definită ca o proiectivitate care conservă planul de la infinit. Aceasta implică $\alpha_{41}=\alpha_{42}=\alpha_{43}=0$ şi deci

$$D=\alpha_{44}\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix} .$$

Relaţiile (A.71) vor deveni prin urmare:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} ,\\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} ,\\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} . \end{aligned} \qquad \text{(A.72)}$$

Se poate menţiona de asemenea că raportul volumelor este un invariant afin.

A.3.4. Transformarea prin inversiune

După cum s-a arătat în paragraful A.3.1.c, transformarea prin inversiune este o omografie particulară. Ea are aplicaţii îndeosebi în fotogrammetrie şi în cartografie.

Pentru a defini transformata prin inversiune (F') a unei figuri (F), se consideră un punct fix O şi un număr algebric K; fiecărui punct M al figurii (F) îi va corespunde un punct M' (care va genera figura F'), cu condiţiile:

- punctele O,M şi M' să fie coliniare;
- să fie îndeplinită relaţia

$$\overline{OM}\cdot\overline{OM'}=K \ . \qquad \text{(A.73)}$$

Punctul O se numeşte centrul sau polul inversiunii, iar K se numeşte puterea sau modulul inversiunii.

Se pot menţiona următoarele proprietăţi:

- dacă figurii (F') i se aplică aceeaşi inversiune (cu acelaşi pol şi aceeaşi putere) se va obţine figura iniţială (F);
- produsul a două inversiuni cu centrul O şi modulul K, respectiv K', este o omotetie cu centrul O şi raportul de omotetie K/K';
- locul geometric al punctelor duble ale inversiunii (care coincid cu inversele lor) este un cerc cu raza $\sqrt{K}$ şi cu centrul în O, numit cerc de inversiune;
- inversiunea conservă unghiurile, adică este o transformare conformă.

Pentru a exprima analitic inversiunea, se consideră sistemul rectangular Oxy (fig. A.18).

Scanned with OKEN Scanner

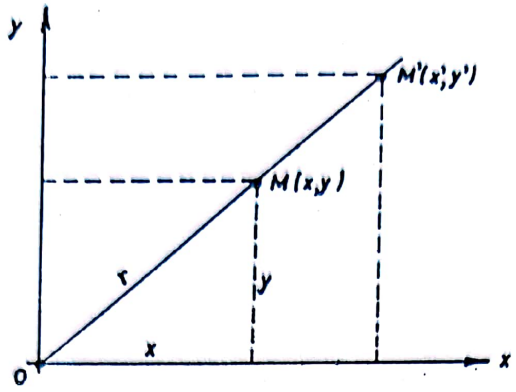

Figura A.18. Transformarea prin inversiune.

Dacă se notează $r = \overline{OM}$, $r' = \overline{OM'}$, se pot scrie relaţiile:

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{r}{r'} .$$

Amplificând ultimul raport cu r şi apoi cu r' şi ţinând seama de (A.73) se obţin încă două raporturi, egale cu primele:

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{r}{r'} = \frac{r^2}{K} = \frac{K}{(r')^2} . \qquad \text{(A.74)}$$

Egalând primul şi apoi al doilea raport cu ultimul, rezultă:

$$\begin{cases} x = \dfrac{Kx'}{(x')^2 + (y')^2} \\ y = \dfrac{Ky'}{(x')^2 + (y')^2} \end{cases} \qquad \text{(A.75)}$$

Prin urmare, dacă se consideră o curbă cu ecuaţia

$$F(x,y) = 0 ,$$

ecuaţia curbei inverse va fi

$$F\left(\frac{Kx'}{(x')^2 + (y')^2}, \frac{Ky'}{(x')^2 + (y')^2} \right) = 0 . \qquad \text{(A.76)}$$

Din egalităţile (A.74) se pot obţine şi mărimile x',y' în funcţie de x şi y, egalând aceleaşi prime două raporturi cu penultimul:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{Kx}{x^2+y^2} \\ y' = \dfrac{Ky}{x^2+y^2} \end{cases} . \tag{A.77}$$

La relaţiile (A.75) şi (A.77) s-a ţinut seama de egalităţile:

$$(r')^2 = (x')^2 + (y')^2 \ ,$$
$$r^2 = x^2 + y^2 \ .$$

În cazul inversiunii în spaţiu, relaţiile corespunzătoare vor fi:

$$\begin{cases} x = \dfrac{Kx'}{(x')^2+(y')^2+(z')^2} \\ y = \dfrac{Ky'}{(x')^2+(y')^2+(z')^2} \\ z = \dfrac{Kz'}{(x')^2+(y')^2+(z')^2} \end{cases} \tag{A.78}$$

respectiv

$$\begin{cases} x' = \dfrac{Kx}{x^2+y^2+z^2} \\ y' = \dfrac{Ky}{x^2+y^2+z^2} \\ z' = \dfrac{Kz}{x^2+y^2+z^2} \end{cases} \tag{A.79}$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

ANEXA B

ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ ŞI ANALIZĂ MATRICEALĂ

B.1. Matrice

B.1.1. Definiţii, cazuri particulare şi proprietăţi generale

O matrice este un tablou dreptunghiular cu m linii şi n coloane:

$$\underset{(m,n)}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right), \qquad \text{(B.1)}$$

unde $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$, iar (m,n) reprezintă ordinul matricei.

Elementele matricei a_{ij} vor fi în cazul nostru numere reale.

O matrice de ordinul $(1,n)$ sau $(m,1)$ se numeşte **vector linie**, respectiv **vector coloană**, iar de ordinul $(1,1)$ se numeşte **scalar**.

Dacă o matrice are toate elementele nule, ea se numeşte **matrice nulă**.

Când $m = n$, adică matricea are ordinul (n,n), matricea se numeşte **pătrată**. În acest caz, se pot menţiona următoarele forme particulare:

a) **matrice simetrică**

dacă $a_{ji} = a_{ij}$

$$A_S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad \text{(B.2)}$$

b) **matrice antisimetrică**

dacă $a_{ji} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } i = j \\ -a_{ij} & \text{pentru } i \neq j \end{cases}$

$$A_A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{(B.3)}$$

c) **matrice superior triunghiulară**

cu $a_{ij} = 0$ dacă $i > j$

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad \text{(B.4)}$$

d) **matrice inferior triunghiulară**

cu $a_{ij} = 0$ dacă $i < j$

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad \text{(B.5)}$$

e) **matrice diagonală**

cu $a_{ij} = 0$ dacă $i \neq j$

Scanned with OKEN Scanner

$$D_g = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad \text{(B.6)}$$

f) **matrice unitate**

$$\text{dacă } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pentru } i = j \\ 0 & \text{pentru } i \neq j \end{cases}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{(B.7)}$$

g) **matrice ortogonală** prezentată la paragraful A.2.2.a_1

Transpusa unei matrice A având ordinul (m,n) este matricea A^T formată din aceleaşi elemente, dar liniile matricei A devenind aici coloane:

$$A^T_{(n,m)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ji}\right). \qquad \text{(B.8)}$$

Se poate remarca de asemenea că $(A^T)^T = A$.

Două matrice $A = (a_{ij})$ şi $B = (b_{ij})$ având acelaşi ordin (m,n) sunt egale dacă $a_{ij} = b_{ij}$.

B.1.2. Operaţii cu matrice

Deşi nu au valoare numerică, matricele permit efectuarea unor operaţii.

Suma a două matrice A şi B de acelaşi ordin (m,n) este matricea

$$C = A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \qquad \text{(B.9)}$$

având de asemenea ordinul (m,n).

Diferența a două matrice se definește similar.

Proprietățile adunării matriceale sunt:

- asociativitatea $(A+B)+C=A+(B+C)$;
- comutativitatea $A+B=B+A$;
- existența elementului neutru $A+O=A$;
- existența elementului opus $A+(-A)=O$;

unde O este matricea nulă de ordinul (m,n).

În particular, dacă A este o matrice pătrată,

$$A+A^{\mathrm{T}}=A_S\ ,\quad A-A^{\mathrm{T}}=A_A\ ,\quad A_A+A_A{}^{\mathrm{T}}=O.$$

De asemenea, orice matrice pătrată poate fi descompusă unic ca sumă a unei matrice simetrice cu o matrice antisimetrică:

$$A=A+\frac{1}{2}A^{\mathrm{T}}-\frac{1}{2}A^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\left(A+A^{\mathrm{T}}\right)+\frac{1}{2}\left(A-A^{\mathrm{T}}\right)\ .$$

Produsul unei matrice cu un scalar este o matrice de același ordin, definită astfel:

$$\lambda A=(\lambda\, a_{ij}) \tag{B.10}$$

și având proprietățile:

$$\lambda(\mu A)=(\lambda\,\mu)A\ ;\ (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A\ ;\ \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B.$$

unde λ și μ sunt doi scalari oarecare.

Produsul a două matrice este definit doar în cazul în care numărul de coloane al primei matrice este egal cu numărul de linii al celei de a doua. Produsul unei matrice A având ordinul (m,n) cu o matrice B având ordinul (n,p) este o matrice C al cărei ordin este dat de numărul de linii al matricei A și numărul de coloane al matricei B:

$$\underset{(m,p)}{C}=\underset{(m,n)}{A}\cdot\underset{(n,p)}{B}=\left(a_{ij}\right)\cdot\left(b_{jk}\right)=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot b_{jk}\right)\ . \tag{B.11}$$

În particular,

$$A\,A^{\mathrm{T}}=A_S\ ;\ A^{\mathrm{T}}A=A_S\ ;\ A\,D_g\,A^{\mathrm{T}}=A_S\ ;\ A^{\mathrm{T}}D_g\,A=A_S.$$

Produsul unei matrice cu un vector va fi definit în aceleași condiții ca și produsul a două matrice și va fi tot un vector:

Scanned with OKEN Scanner

$$\underset{(m,1)}{U} = \underset{(m,n)}{A} \cdot \underset{(n,1)}{V} , \tag{B.12}$$

sau

$$\underset{(1,n)}{V^{\mathrm{T}}} = \underset{(1,m)}{U^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{(m,n)}{A} , \tag{B.13}$$

unde s-a folosit convenţia definirii vectorilor ca vectori coloană, vectorii linie rezultând prin transpunerea acestora.

Pe de altă parte, produsul unui vector linie cu un vector coloană este un scalar:

$$\underset{(1,1)}{\lambda} = \underset{(1,n)}{V^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{(n,1)}{V} , \tag{B.14}$$

în timp ce produsul unui vector coloană cu un vector linie este o matrice pătrată de ordinul n:

$$\underset{(n,n)}{A} = \underset{(n,1)}{V} \cdot \underset{(1,n)}{V^{\mathrm{T}}} . \tag{B.15}$$

Proprietăţile înmulţirii matriceale sunt:

- asociativitatea $(A\,B)\,C = A\,(B\,C)$;
- necomutativitatea $A\,B = B\,A$

(în particular, când înmulţirea este comutativă, matricele se numesc permutabile);

- distributivitatea $A\,(B+C) = A\,B + A\,C$;
  $(A+B)\,C = A\,C + B\,C$;
- existenţa elementului neutru $A\,I = I\,A = A$

În ceea ce priveşte existenţa elementului invers A^{-1}, această problemă va fi tratată ulterior.

Dacă produsul a două matrice este egal cu matricea nulă ($A \cdot B = O$), nu înseamnă că neapărat unul din factori trebuie să fie nul, dar cel puţin una din matrice este singulară (are determinantul nul). Desigur însă că $A \cdot O = O$ şi $O \cdot A = O$.

Dacă A este o matrice pătrată, se poate scrie de asemenea:

$$A\,A = A^2 ; \quad A^o = I ; \quad I^n = I ; \quad A^m A^n = A^{m+n} ; \quad \left(A^m\right)^n = A^{mn}$$

(m,n fiind întregi pozitivi).

Faţă de operaţia transpunerii se pot menţiona următoarele proprietăţi:

$$\left(A+B\right)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}} \quad ; \quad \left(\lambda\,A\right)^{\mathrm{T}} = \lambda\,A^{\mathrm{T}} \quad ; \quad \left(A\,B\right)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} .$$

Scanned with OKEN Scanner

B.1.3. Matricea inversă

Dacă $A \cdot B = B \cdot A = I$, matricele A şi B sunt inverse una alteia şi se notează $B = A^{-1}$.

O matrice pătrată A de ordinul n se numeşte **inversabilă** (regulată) dacă există o matrice pătrată de ordinul n notată A^{-1}, astfel încât:

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I \ . \tag{B.16}$$

În acest caz, matricea A^{-1} este unic determinată şi se numeşte **inversa matricei** A:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{B.17}$$

unde $|A|$ este determinantul matricei A, iar A_{ij} sunt complementii algebrici (cofactorii) elementelor a_{ij} (din A), adică $A_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ (v. paragraful B.2.2).

După cum se observă din (B.17), matricea A^{-1} este definită doar în cazul în care $|A| \neq 0$, adică matricea A este **nesingulară** . Prin urmare, o condiţie necesară şi suficientă ca o matrice A să fie inversabilă este ca vectorii coloană/linie să fie liniar independenţi.

Dacă A şi B sunt matrice inversabile, iar λ un scalar, se pot menţiona următoarele proprietăţi referitoare la operaţia inversării:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A; \ \left(A^{-1}\right)^{n} = A^{-n} = \left(A^{n}\right)^{-1}; \ I^{-1} = I;$$

$$\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}; \ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}; \ (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1} \ .$$

În cazul unei matrice pătrate A având ordinul n, partiţionată în 4 submatrice: $A_{11}(n_1,n_1)$, $A_{12}(n_1,n_2)$, $A_{21}(n_2,n_1)$ şi $A_{22}(n_2,n_2)$, unde $n_1 + n_2 = n$, matricea inversă se va obţine tot în forma partiţionată:

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} . \tag{B.18}$$

Având în vedere că $A A^{-1} = A B = I$, se poate scrie:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & O \\ O & I_{n_2} \end{pmatrix},$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă un sistem de 4 ecuaţii matriceale, cu 4 necunoscute:

$$\begin{cases} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_{n_1} \\ A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = O \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = O \\ A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = I_{n_2} \end{cases} \tag{B.19}$$

Se poate observa că submatricele B_{ij} vor avea acelaşi ordin ca şi submatricele A_{ij} corespunzătoare.

Pentru a rezolva sistemul (B.19), se deduce mai întâi B_{21} din cea de a treia ecuaţie

$$B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} \tag{B.20}$$

şi se înlocuieşte în prima, de unde se obţine B_{11} :

$$B_{11} = \left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1}. \tag{B.21}$$

Pe de altă parte, din ecuaţia a 4-a rezultă

$$B_{22} = A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1}A_{21}B_{12} \ , \tag{B.22}$$

iar prin înlocuire în cea de-a doua ecuaţie şi ţinând seama de (B.21) se obţine:

$$B_{12} = -B_{11}A_{12}A_{22}^{-1} \ . \tag{B.23}$$

Aceste relaţii permit determinarea celor 4 submatrice ale matricei inverse în ordinea B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}.

Dacă A este o matrice simetrică, atunci $A_{21} = A_{12}^T$ şi în consecinţă $B_{21}=B_{12}^T$.

Acest mod de a realiza inversarea unei matrice prezintă avantajul calculului inversei pentru submatrice de dimensiuni mai mici. Acest avantaj poate fi şi mai evident dacă inversarea prin partiţionare se execută în mai mulţi paşi.

O altă situaţie particulară o prezintă inversarea matricelor bloc diagonale, care sunt matrice pătrate având submatrice pătrate nenule pe diagonala principală şi submatrice nule în afara acesteia:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & O & \cdots & O \\ O & A_{22} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix} \tag{B.24}$$

Scanned with OKEN Scanner

Evident, submatricele A_{ii} pot avea dimensiuni diferite. Inversa unei astfel de matrice se va obţine calculând inversele submatricelor A_{ii}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & O & \cdots & O \\ O & A_{22}^{-1} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_{kk}^{-1} \end{pmatrix} \qquad \text{(B.25)}$$

Referitor la cazul general când A este o matrice **dreptunghiulară** (m,n), se poate defini **pseudoinversa** matricei A în două moduri:

- dacă $m > n$ şi coloanele matricei A sunt liniar independente

$$A^{+} = \left(A^{T}A\right)^{-1}A^{T} , \qquad \text{(B.26)}$$

- dacă $m < n$ şi liniile matricei A sunt liniar independente

$$A^{+} = A^{T}\left(AA^{T}\right)^{-1} . \qquad \text{(B.27)}$$

B.1.4. Rangul unei matrice. Transformări elementare

Rangul unei matrice $A(m,n)$ este un număr $r \leq min(m,n)$, astfel încât cel puţin un determinant de ordinul r format cu elementele matricei să fie diferit de zero şi toţi determinanţii de ordin $r + 1$ să fie nuli (v. paragraful B.2.2). Prin urmare, rangul unei matrice este egal cu ordinul maxim al minorilor diferiţi de zero ai matricei. Evident, dacă $A = O$, $r = 0$. O proprietate importantă constă în faptul că rangul unei matrice este invariant faţă de transformările elementare.

Prin transformări elementare ale unei matrice se înţeleg următoarele operaţii:

- schimbarea a două linii/coloane între ele ;
- înmulţirea elementelor unei linii/coloane cu un scalar $\lambda \neq 0$;
- adunarea la elementele unei linii/coloane a elementelor altei linii/coloane, înmulţite cu scalar $\lambda \neq 0$.

Două matrice A şi B se numesc **echivalente** dacă se poate obţine una din cealaltă printr-un număr finit de transformări elementare.

B.1.5. Diferenţierea matricelor

Fie o matrice $A = (a_{ij})$ ale cărei elemente (sau o parte din ele) sunt funcţii de una sau mai multe variabile: $a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi prin urmare $A = A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se consideră la început că elementele matricei sunt funcţii de o singură variabilă x, se poate spune că funcţia $A(x)$ este derivabilă în punctul $x=x^o$, dacă elementele ei sunt derivabile în acel punct şi se poate scrie:

$$\left.\frac{dA}{dx}\right|_{x=x^o} = \left(\frac{da_{ij}}{dx}\right)_{x=x^o} \qquad \text{(B.28)}$$

Adică, derivata matricei în punctul x^o este matricea formată din derivatele fiecărui element a_{ij} în raport cu x, în punctul $x=x^o$. Evident, definiţia este similară pentru vectori.

În cazul unei funcţii matriceale de mai multe variabile $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, derivatele parţiale ale acestei funcţii se definesc asemănător:

$$\left.\frac{\partial A}{\partial x}\right|_{\left(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o\right)} = \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x}\right)_{\left(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o\right)} \quad \text{etc.} \qquad \text{(B.29)}$$

Pentru exemplificare, se va considera matricea de rotaţie R în forma (A.32) şi se vor determina derivatele parţiale ale acestei matrice în raport cu parametrii ω, φ şi κ pentru valorile $\omega^o = \varphi^o = \kappa^o = 0$.

Pentru a obţine derivata matricei R în raport cu ω, se calculează:

$$\frac{\partial r_{11}}{\partial \omega} = 0 \quad , \quad \frac{\partial r_{12}}{\partial \omega} = 0 \quad , \quad \frac{\partial r_{13}}{\partial \omega} = 0 \ ,$$

$$\left(\frac{\partial r_{21}}{\partial \omega}\right)^o = \cos\omega^o \sin\varphi^o \cos\kappa^o - \sin\omega^o \sin\kappa^o = -r_{31}^o = 0$$

$$\left(\frac{\partial r_{22}}{\partial \omega}\right)^o = -\cos\omega^o \sin\varphi^o \sin\kappa^o - \sin\omega^o \cos\kappa^o = -r_{32}^o = 0$$

$$\left(\frac{\partial r_{23}}{\partial \omega}\right)^o = -\cos\omega^o \cos\varphi^o = -r_{33}^o = -1$$

$$\left(\frac{\partial r_{31}}{\partial \omega}\right)^o = \sin\omega^o \sin\varphi^o \cos\kappa^o + \cos\omega^o \sin\kappa^o = r_{21}^o = 0$$

$$\left(\frac{\partial r_{32}}{\partial \omega}\right)^o = -\sin\omega^o \sin\varphi^o \sin\kappa^o + \cos\omega^o \cos\kappa^o = r_{22}^o = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\left(\frac{\partial r_{33}}{\partial \omega}\right)^{o} = -\sin\omega^{o}\cos\varphi^{o} = r_{23}^{o} = 0 \ ,$$

Prin urmare,

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \omega}\right)^{o} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -r_{31} & -r_{32} & -r_{33} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \end{pmatrix}^{o} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(B.30)}$$

Similar, se pot obţine derivatele în raport cu φ :

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \varphi}\right)^{o} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\kappa & \sin\varphi\sin\kappa & \cos\varphi \\ \sin\omega\cos\varphi\cos\kappa & -\sin\omega\cos\varphi\sin\kappa & \sin\omega\sin\varphi \\ -\cos\omega\cos\varphi\cos\kappa & \cos\omega\cos\varphi\sin\kappa & -\cos\omega\sin\varphi \end{pmatrix}^{o} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(B.31)}$$

şi în raport cu κ :

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \kappa}\right)^{o} = \begin{pmatrix} r_{12} & -r_{11} & 0 \\ r_{22} & -r_{21} & 0 \\ r_{32} & -r_{31} & 0 \end{pmatrix}^{o} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(B.32)}$$

Trebuie remarcat că aceleaşi matrice (B.30), (B.31) şi (B.32) rezultă (în forma finală) pornind de la oricare din cele 6 forme ale matricei R. De asemenea, se poate observa că ele se pot deduce formal mai uşor, având în vedere matricea rotaţiilor diferenţiale (A.35).

B.2. Determinanţi

B.2.1. Definiţii

Determinantul unei matrice pătrate $A = (a_{ij})$ de ordinul n se poate scrie sub forma:

$$D = |A| = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \text{(B.33)}$$

şi (spre deosebire de matricea A) el are o valoare numerică dată de expresia

$$D=|A|=\sum(-1)^k a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}\ , \tag{B.34}$$

unde indicii $j_1, j_2, \ldots, j_n$ reprezintă o permutare (oarecare) a numerelor $1,2,\ldots,n$, iar k este numărul inversiunilor acelei permutări. Se poate preciza că într-o permutare, un element prezintă o inversiune faţă de un alt element aflat la dreapta lui dacă este mai mare decât acesta. Numărul termenilor sumei (B.34) este $n!$, acesta fiind numărul permutărilor celor n numere.

B.2.2. Calculul determinanţilor

În cazul determinanţilor de ordinul 2 şi 3, calculul se realizează foarte uşor:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\ , \tag{B.35}$$

respectiv

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

$$a_{11}\ a_{12}\ a_{13}$$
$$a_{21}\ a_{22}\ a_{23}$$

(B.36)

aici fiind utilizată **regula lui Sarrus.**

În cazul determinanţilor de ordin superior, dacă se notează $A_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ **complementul algebric** al elementului a_{ij}, $D_{ij} = |A_{ij}|$ fiind **minorul** corespunzător, determinantul $D = |A|$ se poate calcula prin dezvoltare după o linie i / coloană j (fixată):

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}\ , \tag{B.37}$$

respectiv

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}\ . \tag{B.38}$$

De aici se poate deduce că determinantul este o funcţie liniară de elementele fiecărei linii/coloane.

Scanned with OKEN Scanner

B.2.3. Proprietăţile determinanţilor

Se pot menţiona următoarele proprietăţi ale determinanţilor:

- un determinant este egal cu zero: dacă toate elementele unei linii/coloane sunt nule, dacă elementele a două linii/coloane sunt egale sau proporţionale, sau dacă elementele unei linii/coloane reprezintă o combinaţie liniară a elementelor altor linii/coloane ;
- dacă se schimbă între ele două linii/coloane, determinantul îşi schimbă semnul ;
- valoarea unui determinant nu se modifică dacă se schimbă liniile în coloane de acelaşi rang (determinantul matricei transpuse A^T este acelaşi cu al matricei iniţiale A), sau dacă se adună la elementele unei linii/coloane, elementele altor linii/coloane înmulţite cu câte un scalar (acelaşi, pentru o anumită linie/coloană);
- dacă fiecare element al unei linii/coloane este egal cu o sumă de h termeni, determinantul se poate descompune într-o sumă de h determinanţi ;
- dacă elementele unei linii/coloane au un factor comun, acesta se poate scoate în faţa determinantului; de aici se poate deduce de asemenea că, înmulţind toate elementele unei linii/coloane cu un scalar, valoarea determinantului se va înmulţi cu acel număr ;
- determinantul produsului a două matrice este egal cu produsul determinanţilor acelor matrice: $|C| = |AB| = |A||B|$;
- determinantul unei matrice de tipul S (B.4), T (B.5) sau D_g (B.6) este dat de produsul elementelor de pe diagonala principală a matricei.

B.2.4. Diferenţierea determinanţilor

Dacă elementele unui determinant $D = |A| = |a_{ij}|$ sunt funcţii derivabile de o variabilă $a_{ij} = a_{ij}(x)$ într-un punct x^o, **derivata determinantului** $D = D(x)$ în acel punct este:

$$\left.\frac{dD}{dx}\right|_{x=x^o} = \sum_{i=1}^{n} \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{da_{i1}}{dx} & \dfrac{da_{i2}}{dx} & \cdots & \dfrac{da_{in}}{dx} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right|_{x=x^o} \qquad \text{(B.39)}$$

constând deci dintr-o sumă de n determinanţi obţinuţi prin derivarea succesivă a celor n linii/coloane.

În cazul în care determinantul este funcţie de mai multe variabile $D(x_1,x_2,...,x_n)$, **derivatele parţiale** în raport cu aceste variabile se definesc asemănător:

$$\left.\frac{\partial D}{\partial x}\right|_{(x_1^o,x_2^o,...,x_n^o)} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial a_{i1}}{\partial x} & \dfrac{\partial a_{i2}}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial a_{in}}{\partial x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{(x_1^o,x_2^o,...,x_n^o)} \quad \text{etc} \quad \text{(B.40)}$$

Aceste derivate parţiale apar de exemplu la liniarizarea funcţiei $D(x_1,x_2,...,x_n)$ (presupunând elementele a_{ij} neliniare în raport cu variabilele $x_1,x_2,...,x_n$) prin dezvoltare în **serie Taylor** în vecinătatea punctului $(x_1^o,x_2^o,...,x_n^o)$:

$$D\left(x_1^o+dx_1,x_2^o+dx_2,...,x_n^o+dx_n\right) = D\left(x_1^o,x_2^o,...,x_n^o\right) + \\ +\left(\frac{\partial D}{\partial x_1}\right)^o dx_1 + \left(\frac{\partial D}{\partial x_2}\right)^o dx_2 + ... + \left(\frac{\partial D}{\partial x_n}\right)^o dx_n + ... \quad \text{(B.41)}$$

unde indicele superior " ^{o} " la parantezele din membrul drept se referă la calculul derivatelor parţiale în punctul $(x_1^o,x_2^o, \ldots ,x_n^o)$.

Evident, pentru liniarizare se vor reţine doar termenii de primul ordin diferenţial ai seriei Taylor şi prin urmare $x_1^o,x_2^o,...,x_n^o$ vor trebui să fie bune aproximaţii ale mărimilor $x_1,x_2,...,x_n$ astfel încât corecţiile $dx_1,dx_2,..,dx_n$ să fie mici, iar formula (B.41) să poată reprezenta o bună aproximaţie a funcţiei $D(x_1,x_2,...,x_n)$.

Dacă dezvoltarea se face în vecinatatea originii ($x_1^o=0$, $x_2^o=0$, ... , $x_n^o=0$), seria corespunzătoare se numeşte **serie Mac Laurin.**

Pe de altă parte, dacă $D(x_1,x_2,...,x_n)$ este o funcţie de n variabile independente, admiţând derivate parţiale de ordinul întâi într-un anumit domeniu, **diferenţiala totală de ordinul întâi** a acestei funcţii va fi:

$$dD = \frac{\partial D}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial D}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial D}{\partial x_n}dx_n \ . \quad \text{(B.42)}$$

În cazul unui sistem de n funcţii de n variabile $f_i\,(x_1,x_2, \ldots ,x_n)$, i=1,...,n, continue şi derivabile într-un anumit domeniu, se poate defini **determinantul funcţional** sau **jacobianul** acestui sistem sub forma:

$$J = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \qquad \text{(B.43)}$$

Dacă mărimile x_j sunt la rândul lor funcţii de alte n variabile t_k definite într-un domeniu corespunzător, se poate scrie:

$$J = \left| \frac{\partial f_i}{\partial t_k} \right| = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \left| \frac{\partial x_j}{\partial t_k} \right| . \qquad \text{(B.44)}$$

B.3. Sisteme de ecuaţii liniare

B.3.1. Consideraţii generale

Fie un sistem de n ecuaţii liniare cu n necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Dacă se introduc notaţiile

$$\underset{(n,n)}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \underset{(n,1)}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \underset{(n,1)}{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

sistemul anterior poate fi scris sub forma:

$$A\,x = b\ . \qquad \text{(B.45)}$$

O altă formulare matriceală a aceluiaşi sistem poate fi:

$$\underset{(n,n+1)}{\overline{A}} \cdot \underset{(n+1,1)}{\overline{x}} = \underset{(n,1)}{O},$$

unde

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} = (A/b) \quad , \quad \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\overline{A}$ reprezentând matricea extinsă (cu coloana termenilor liberi).

Această formulare permite generalizarea pentru cazul rezolvării a m sisteme de ecuaţii având aceeaşi matrice A, dar cu diferite valori ale termenilor liberi:

$$A x^{(k)} = b^{(k)} \quad , \quad k = 1,2,\ldots,m \; . \tag{B.46}$$

Dacă se notează

$$\overline{A} = \left(A/b^{(1)}/b^{(2)}/\mathrm{L}\,/b^{(m)}\right)$$

matricea extinsă (cu cele m coloane de termeni liberi) şi

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(m)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_2^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(m)} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ -I \end{pmatrix},$$

atunci cele m sisteme (B.46) pot fi scrise sub forma:

$$\underset{(n,n+m)}{\overline{A}} \cdot \underset{(n+m,m)}{\overline{X}} = \underset{(n,m)}{\overline{O}} \; .$$

O situaţie asemănătoare apare la problema inversării unei matrice pătrate A:

$$A X = I \; .$$

Scanned with OKEN Scanner

Adică, vor trebui determinate coloanele $x^{(1)},x^{(2)},...,x^{(n)}$ ale matricei inverse $X=A^{-1}$, cunoscând coloanele $i^{(1)},i^{(2)},...,i^{(n)}$ ale matricei unitate şi prin urmare problema revine la rezolvarea a n sisteme de tipul (B.46):

$$A x^{(k)} = i^{(k)} \quad , \quad k = 1,2,...,n \ . \tag{B.47}$$

Revenind la forma iniţială (B.45) a unui sistem de n ecuaţii liniare cu n necunoscute, se face precizarea că în cazul de faţă A se consideră o matrice reală. Dacă această matrice este inversabilă, atunci -conform teoremei de existenţă şi unicitate- oricare ar fi vectorul real b, sistemul (B.45) are o soluţie unică ce poate fi scrisă sub forma:

$$x = A^{-1}b \ . \tag{B.48}$$

B.3.2. Condiţionarea matricelor

După cum s-a precizat anterior, pentru a exista soluţia (B.48), matricea A trebuie să fie inversabilă şi prin urmare nesingulară ($| A | \neq 0$). Se poate întâmpla însă ca valoarea determinantului să fie foarte mică (în raport cu elementele matricei). În acest caz (deşi determinantul este diferit de zero) soluţia sistemului este valabilă numai dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

- elementele a_{ij} şi b_i să fie numere exacte;
- calculele să fie făcute exact (fără rotunjiri ale rezultatelor intermediare şi finale).

În practică, însă, aceste condiţii nu sunt îndeplinite şi în consecinţă soluţia poate să-şi piardă orice semnificaţie.

Aceasta ne conduce la a defini, pe lângă cele 3 cazuri cunoscute (sistem compatibil determinat, sistem compatibil nedeterminat şi sistem incompatibil), un al patrulea: **sistem rău (slab)-condiţionat.** Un astfel de sistem, caracterizat printr-o valoare foarte mică a determinantului matricei coeficienţilor, prezintă proprietatea că este verificat (cu o aproximaţie destul de bună) de mai multe şiruri de soluţii situate într-un anumit domeniu de nedeterminare.

Prin urmare, dacă la rezolvarea unui sistem s-a obţinut o anumită soluţie care, verificată în ecuaţiile iniţiale conduce la valori apropiate de cele ale termenilor liberi iniţiali, nu înseamnă că soluţia este sigur bună (aceasta depinzând de condiţionarea matricei A).

O **matrice** se numeşte **bine-condiţionată** dacă matricea sa inversă există şi este stabilă.

Matricea inversa A^{-1} se numeşte **stabilă** dacă la creşteri mici ale elementelor matricei A corespund creşteri mici ale matricei A^{-1} .

Desigur, un sistem rău-condiţionat poate fi evidenţiat cel mai simplu prin valoarea determinantului matricei coeficienţilor (după cum s-a arătat anterior).

Scanned with OKEN Scanner

B.3.3. Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

a. Clasificarea şi caracterizarea generală metodelor de rezolvare

În cele ce urmează se vor avea în vedere doar sistemele de ecuaţii liniare neomogene, având matricea coeficienţilor A pătrată, nesingulară şi bine condiţionată.

În general, metodele de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare se pot clasifica în metode directe şi metode iterative.

Metodele directe determină în principiu o soluţie exactă (riguroasă) după un număr finit de operaţii aritmetice. Erorile de rotunjire pot conduce însă la erori importante ale soluţiei.

Metodele iterative presupun (teoretic) un număr nelimitat de operaţii aritmetice pentru a ajunge la un rezultat exact. În schimb aici erorile de rotunjire nu se cumulează, corectându-se în iteraţiile succesive.

Pentru a compara metodele de rezolvare a sistemelor liniare trebuie să se aibă în vedere câteva criterii şi anume:

- precizia soluţiei, stabilitatea la erorile de rotunjire;
- timpul de calcul necesar, viteza de convergenţă;
- tipurile de matrice pentru care metoda respectivă este aplicabilă;
- cerinţele de memorie, având în vedere sistemul de calcul disponibil;
- performanţele referitoare la sistemele rău (slab) - condiţionate.

În acest sens, pe lângă caracterizările generale prezentate anterior se pot menţiona principalele avantaje şi dezavantaje ale celor două categorii de metode.

Astfel, metodele directe prezintă următoarele avantaje:

- permit rezolvarea eficientă şi rapidă a sistemelor de tipul (B.46), pentru diferiţi termeni liberi;
- au numărul de operaţii finit şi independent de precizia dorită;
- permit reducerea timpului de calcul prin considerarea structurilor speciale (simetrice, bandă etc.);
- pot realiza eficient atât în cazul matricelor generale, cât şi al celor cu structuri speciale, operaţia de inversare (necesară calculului preciziilor la aplicarea metodei pătratelor minime).

În ceea ce priveşte dezavantajele acestor metode şi anume

- cerinţele mari de memorie şi
- propagarea erorilor de rotunjire,

acestea pot fi depăşite în cazul sistemelor moderne de calcul şi aplicând tehnici de calcul adecvate, metodele directe fiind eficiente şi în cazul sistemelor mari.

Scanned with OKEN Scanner

Referitor la metodele iterative se pot menţiona următoarele avantaje:
- cerinţe de memorie mai reduse;
- obţinerea rapidă a unei soluţii mai puţin precise;
- implementarea simplă, chiar dacă se utilizează memoria externă.

Principalele inconveniente ale acestor metode ar fi:
- convergenţa, chiar dacă este asigurată, poate fi deseori lentă;
- timpul de calcul şi precizia soluţiei depind de valorile aproximative iniţiale, precum şi de alţi parametri iniţiali.

b. Metode directe de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare

Cea mai simplă metodă de rezolvare aplicabilă însă doar sistemelor foarte mici este **regula lui Cramer**. Soluţia se obţine în acest caz cu relaţii de forma:

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n \ , \tag{B.49}$$

unde $D = |A|$, iar determinanţii D_i se obţin prin înlocuirea coloanei i din D cu vectorul termenilor liberi b.

Una din cele mai vechi şi mai larg folosite metode directe este **metoda Gauss**. În principiu ea constă în eliminarea succesivă a necunoscutelor $x_1,\ldots,x_{n-1}$ din ecuaţiile 2,...,n, rezultând o matrice superior triunghiulară a coeficienţilor. Soluţia se va putea obţine acum uşor, parcurgând ecuaţiile în ordine inversă.

O altă metodă directă este **metoda descompunerii triunghiulare**. Înainte de a o prezenta, se va formula o definiţie importantă:

- fie A o matrice pătrată de ordinul n; dacă submatricele $A^{(k)}$, k=1,...,n, sunt nesingulare, adică

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0 \quad , \quad k = 1,\ldots,n \quad , \tag{B.50}$$

se spune că matricea A satisface condiţia $C(n)$.

Evident, $A^{(1)} = (a_{11})$, iar $A^{(n)} = A$.

Conform teoremei de descompunere, orice matrice pătrată A de ordinul n care satisface condiţia $C(n)$ se poate scrie în mod unic sub forma:

$$A = T_1 D_g S_1 \ , \tag{B.51}$$

unde T_1 şi S_1 sunt matrice inferior, respectiv superior, triunghiulare de tipul (B.5) respectiv (B.4), având însă 1 pe diagonala principală ($a_{ii} = 1$; i=1,...,n).

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, orice matrice superior triunghiulară S se poate scrie în mod unic ca produs de două matrice particulare:

$$S = D_g S_1 \tag{B.52}$$

şi orice matrice inferior triunghiulară T se poate scrie în mod unic sub forma:

$$T = T_1 D_g \ . \tag{B.53}$$

Combinând (B.51) şi (B.52), se va considera descompunerea matricei A în modul:

$$A = T_1 S \ . \tag{B.54}$$

În acest caz, sistemul (B.45) devine:

$$T_1 S x = b \ . \tag{B.55}$$

Dacă se notează

$$S x = y \ , \tag{B.56}$$

sistemul (B.55) se va scrie sub forma:

$$T_1 y = b \ . \tag{B.57}$$

Prin urmare, rezolvarea sistemului de ecuaţii (B.45) se va realiza (prin metoda descompunerii triunghiulare) în 3 etape:

- descompunerea matricei A în două matrice triunghiulare (T_1 şi S) conform relaţiei (B.54);
- determinarea vectorului auxiliar y prin rezolvarea sistemului (B.57);
- aflarea necunoscutelor x prin rezolvarea sistemului(B.56).

După cum se poate remarca, singura etapă mai laborioasă va fi prima, deoarece rezolvarea sistemelor (B.56) şi (B.57) se face foarte uşor, matricele coeficienţilor fiind triunghiulare.

O metodă asemănătoare, dar aplicabilă numai sistemelor având matricea coeficienţilor simetrică şi pozitiv definită este metoda **rădăcinilor pătrate.**

Conform teoremei de descompunere a matricelor simetrice, orice matrice simetrică A de ordinul n cu elemente complexe, care satisface condiţia $C(n)$, se poate scrie sub forma:

$$A = T T^{T} \ . \tag{B.58}$$

Trebuie menţionat că această descompunere nu este unică, existând 2^n matrice care satisfac egalitatea (B.58), deoarece fiecare element de pe diagonala principală, fiind un radical, se poate alege în două moduri distincte (cu + sau cu –).

Dacă matricea simetrică A satisface condiţia $C(n)$ şi are toate elementele reale, nu rezultă că matricea T va avea de asemenea toate elementele reale,

Scanned with OKEN Scanner

deoarece pe diagonala principală a matricei T se pot obţine numere complexe. Pentru că T să aibă toate elementele reale, este necesar şi suficient ca matricea A să fie pozitiv definită.

O matrice simetrică A de ordinul n cu toate elementele reale se numeşte **pozitiv definită** dacă îndeplineşte una din următoarele proprietăţi:

- determinanţii şirului de submatrice $A^{(k)}$,k=1, ... ,n sunt pozitivi, adică

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad , \quad k = 1, \ldots, n \quad , \tag{B.59}$$

- oricare ar fi vectorul $x \in R^n$ $(x \neq O)$, produsul scalar

$$(x\,,\,Ax) = x^{\mathrm{T}}Ax > 0\,; \tag{B.60}$$

- există o matrice superior triunghiulară S, sau o matrice inferior triunghiulară T cu toate elementele reale astfel încât:

$$A = S^{\mathrm{T}}S \ ,$$

respectiv

$$A = T\,T^{\mathrm{T}}.$$

Trebuie remarcat că sistemele de ecuaţii normale care urmează a fi rezolvate în urma aplicării principiului pătratelor minime au matricea coeficienţilor simetrică şi pozitiv definită şi prin urmare se pretează utilizării metodei rădăcinilor pătrate.

Considerând matricea $A \in R^{n\times n}$ simetrică şi pozitiv definită descompusă în forma (B.58), sistemul de ecuaţii (B.45) devine:

$$T\,T^{\mathrm{T}}\,x = b \ . \tag{B.61}$$

Dacă se notează

$$T^{\mathrm{T}}x = y \ , \tag{B.62}$$

sistemul (B.61) se va scrie sub forma:

$$T\,y = b \tag{B.63}$$

Prin urmare, rezolvarea sistemului de ecuaţii (B.45) se va realiza (ca şi în cazul anterior) în 3 etape:

- descompunerea matricei A în două matrice triunghiulare (T şi transpusa sa T^{T}) conform relaţiei (B.58);
- determinarea vectorului auxiliar y prin rezolvarea sistemului (B.63);

Scanned with OKEN Scanner

- aflarea necunoscutelor x prin rezolvarea sistemului (B.62).

Ca şi la metoda descompunerii triunghiulare, rezolvarea sistemelor (B.62) şi (B.63) se face foarte uşor, matricele coeficienţilor fiind triunghiulare. În ceea ce priveşte prima etapă, aici însă va fi mai simplă, determinându-se elementele unei singure matrice T, cealaltă rezultând prin transpunerea acesteia.

c. Rezolvarea sistemelor mari prin metode directe

Se vor avea în vedere aici sistemele mari care rezultă la compensarea aerotriangulaţiei în fotogrammetrie. În acest caz, matricea coeficienţilor sistemului de ecuaţii normale prezintă câteva caracteristici importante de care se va ţine seama la rezolvare şi anume: această matrice este de tip bandă, simetrică şi pozitiv definită şi poate fi uşor partiţionată în submatrice.

c_1 . Metoda Cholesky

Algoritmul Cholesky are la bază metoda rădăcinilor pătrate (prezentată în paragraful anterior) şi care se aplică aici la submatrice. Prin urmare, în locul operaţiilor cu elemente individuale se vor folosi operaţiile corespunzătoare ale calculului matriceal. Pentru exemplificare se va considera o structură tipică (a matricei A) de forma prezentată în figura B.1.

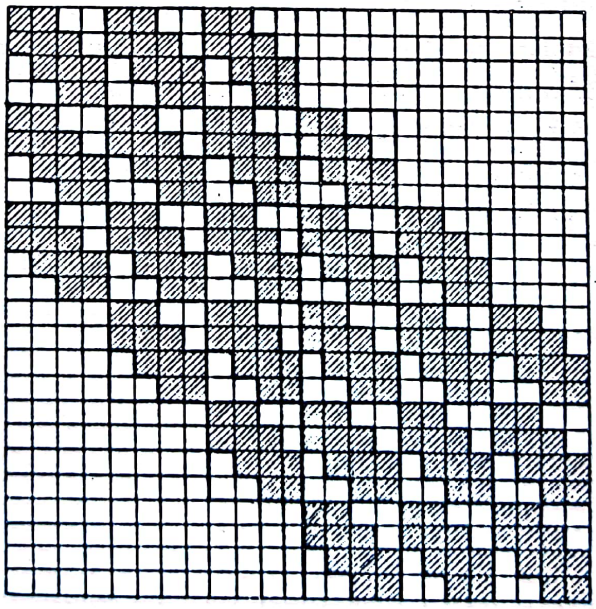

Figura B.1. Structură tipică (în fotogrammetrie) pentru matricea coeficienţilor.

Având în vedere această structură, sistemul ecuaţiilor normale (reduse) se poate reprezenta schematic după cum se arată în figura B.2.

Scanned with OKEN Scanner

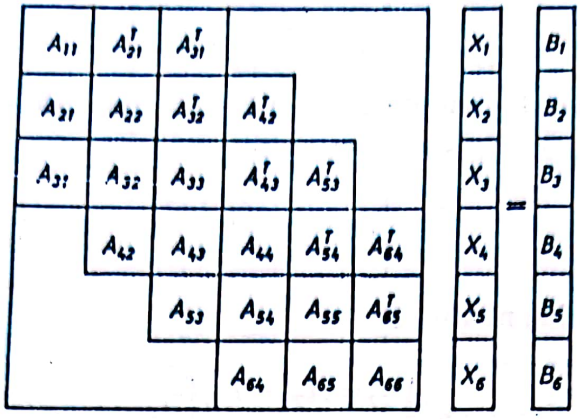

Figura B.2. Reprezentarea schematică a unui sistem cu elemente partiţionate.

Prin urmare, matricea A este partiţionată în submatricele A_{ij} dispuse de asemenea în bandă, cu observaţia că submatricele A_{ii} de pe diagonala principală trebuie să fie pătrate şi nesingulare ($|A_{ii}| \neq 0$). Pe de altă parte, subvectorii X_i şi B_i reprezintă grupările corespunzătoare de necunoscute, respectiv de termeni liberi.

Rezolvarea acestui sistem se face urmând cele 3 etape prezentate anterior la metoda rădăcinilor pătrate, dar în locul vectorilor x, y ,b vor apare X, Y, B.

Etapa 1. Determinarea matricei T conform relaţiei (B.58).

Trebuie remarcat în primul rând că, în cazul matricelor bandă, zonele cu elemente nule exterioare limitelor benzii se vor conserva şi după descompunere în structura matricelor T şi T^T (fig. B.3.), deşi cele interioare în general se vor umple în procesul factorizării.

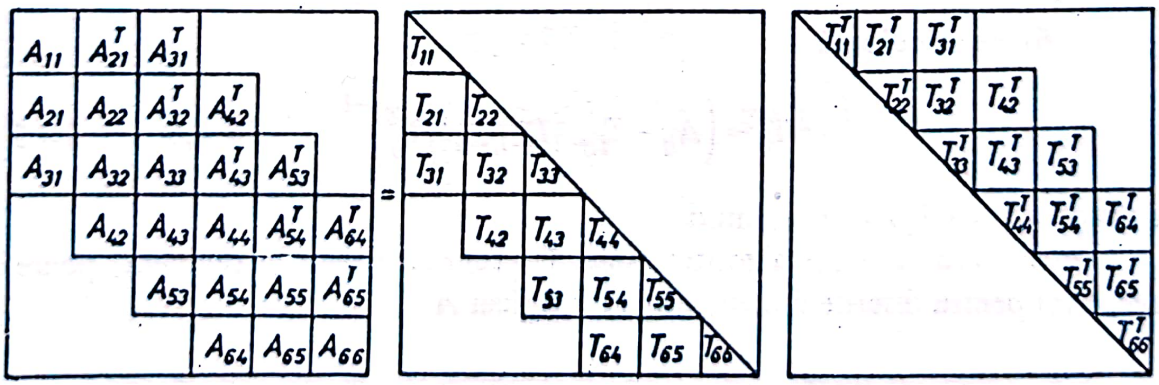

Figura B.3. Descompunerea triunghiulară a matricelor bandă partiţionate.

Determinarea matricei T se face pe coloane, începând cu submatricea corespunzătoare de pe diagonala principală.

Etapele de calcul se pot deduce uşor cu ajutorul figurii B.3.

1) se determină T_{11} prin descompunerea submatricei A_{11}:

$$A_{11} = T_{11} T_{11}^{\mathrm{T}}$$

utilizând metoda rădăcinilor pătrate aplicată la elemente individuale;

2) se calculează T_{21} şi T_{31} cu relaţia:

$$T_{i1} = A_{i1}\left(T_{11}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \quad , \quad i = 2,3 \ ;$$

3) se determină matricea

$$A'_{22} = A_{22} - T_{21} T_{21}^{\mathrm{T}}$$

şi se descompune în forma

$$A'_{22} = T_{22} T_{22}^{\mathrm{T}} \ ;$$

4) se calculează

$$T_{i2} = \left(A_{i2} - T_{j1} T_{21}^{\mathrm{T}}\right)\left(T_{22}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \quad , \quad i = 3,4$$

(cu observaţia că $T_{41} = O$) ;

5) se determină matricea

$$A'_{ii} = A_{ii} - \sum_{j=i-2}^{i-1} T_{ij} T_{ij}^{\mathrm{T}} \quad , \quad i = 3 \ ,$$

şi se descompune în forma

$$A'_{ii} = T_{ii} T_{ii}^{\mathrm{T}} \quad , \quad i = 3 \ ;$$

6) se calculează

$$T_{ij} = \left(A_{ij} - T_{i,j-1} T_{i-1,j-1}^{\mathrm{T}}\right)\left(T_{jj}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \quad , \quad i = 4,5 \quad , \quad j = 3$$

(cu observaţia că $T_{52} = O$) ş.a.m.d.

Se observă că acest algoritm poate fi programat uşor şi (evident) poate fi generalizat pentru diferite dimensiuni ale matricei A.

Etapa 2. Determinarea vectorului auxiliar Y

Pentru aceasta se va reprezenta sistemul $T\,Y = B$ (fig.B.4.).

Scanned with OKEN Scanner

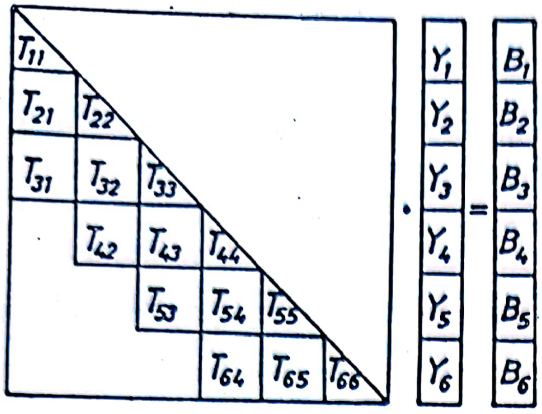

Figura B.4. Determinarea vectorului auxilliar Y.

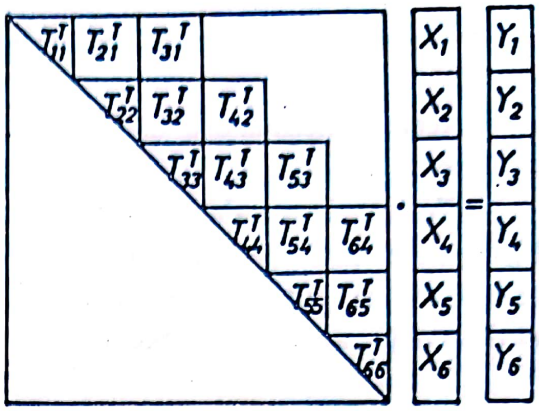

Figura B.5. Determinarea vectorului necunoscutelor X.

De aici se obţine:

$$Y_1 = T_{11}^{-1} B_1$$

$$Y_2 = T_{22}^{-1}\left(B_2 - T_{21} Y_1\right)$$

$$\vdots$$

$$Y_i = T_{ii}^{-1}\left(B_i - \sum_{j=i-2}^{i-1} T_{ij} Y_j\right) \quad , \quad i = 3, \ldots, 6, \ldots$$

Etapa 3. Determinarea necunoscutelor X

Pentru aceasta, se va reprezenta sistemul $T^{\mathrm{T}} X = Y$ (fig.B.5).
Se observă că vectorii X_i se vor obţine în ordine inversă:

$$X_6 = \left(T_{66}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} Y_6$$

$$X_5 = \left(T_{55}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\left(Y_5 - T_{65}^{\mathrm{T}} X_6\right)$$

$$\vdots$$

$$X_i = \left(T_{ii}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\left(Y_i - \sum_{j=i+1}^{i+2} T_{ji}^{\mathrm{T}} X_j\right) \quad , \quad i = 4, \ldots, 1 \quad .$$

După cum s-a mai menţionat, pe baza exemplului prezentat aici se poate realiza un algoritm (respectiv un program) care să fie aplicabil diverselor situaţii concrete întâlnite în fotogrammetrie.

Scanned with OKEN Scanner

c_2 . Metoda partiţionării recursive

Această metodă este de fapt o variantă a metodei Gauss, adaptată la calculul cu submatrice.

Fie un sistem de n ecuaţii normale care în notaţie matriceală are forma (B.45). Acest sistem de ecuaţii poate fi partiţionat după cum se arată în figura B.6, unde p este lăţimea benzii matricei. În ceea ce priveşte dimensiunea $q \le p$ a primului set de ecuaţii, aceasta se alege astfel încât diferenţa $(n\text{-}p)$ să fie divizibilă cu q.

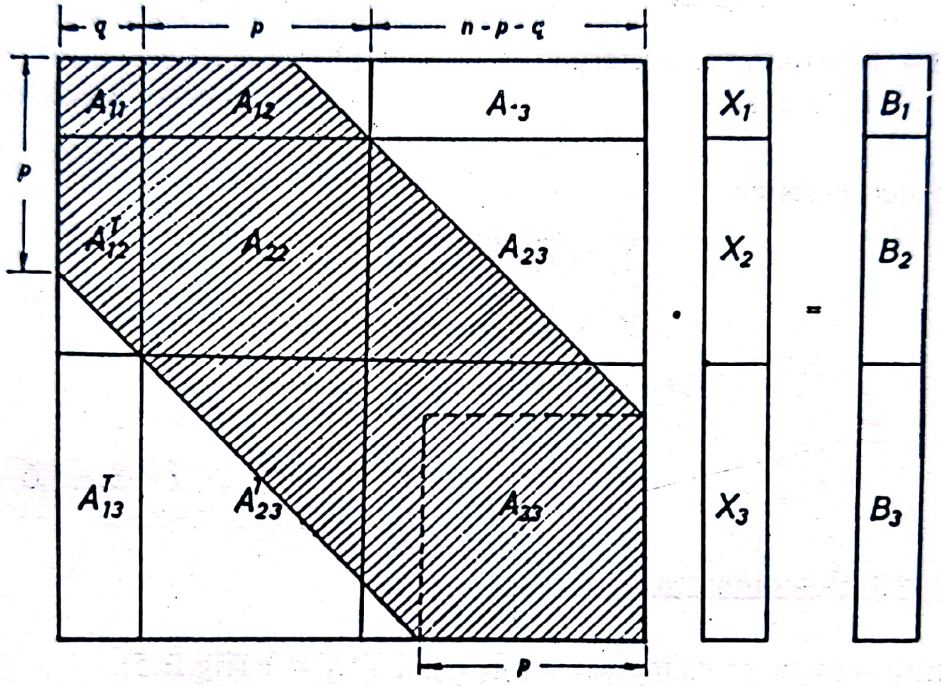

Figura B.6. Principiul partiţionării recursive a sistemului de ecuaţii normale.

Se observă de asemenea că submatricea A_{11} are ordinul (q,q), submatricea A_{22} va trebui să aibă ordinul (p,p), iar submatricele A_{13} şi A_{13}^T vor fi submatrice nule. Pe de altă parte, trebuie menţionat că X_i şi B_i reprezintă grupările de necunoscute, respectiv de termeni liberi, corespunzătoare acestei partiţionări.

Având în vedere reprezentarea sistemului partiţionat din figura B.6, sistemul de ecuaţii (B.45) se poate scrie sub forma:

$$\begin{cases} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + O \cdot X_3 = B_1 \\ A_{12}^T X_1 + A_{22}X_2 + A_{23}X_3 = B_2 \\ O \cdot X_1 + A_{23}^T X_2 + A_{33}X_3 = B_3 \end{cases} \qquad \text{(B.64)}$$

Dacă se determină X_1 din prima ecuaţie

$$X_1 = A_{11}^{-1}(B_1 - A_{12}X_2) \tag{B.65}$$

şi se substituie în următoarea, rezultă:

$$\left(A_{22} - A_{12}^{\mathrm{T}}A_{11}^{-1}A_{12}\right)X_2 + A_{23}X_3 = B_2 - A_{12}^{\mathrm{T}}A_{11}^{-1}B_1 \ .$$

Notând cu A'_{22} coeficientul lui X_2 şi cu B'_2 termenul liber obţinut în membrul drept, sistemul (B.64) se reduce la următoarele două ecuaţii:

$$\begin{cases} A'_{22}X_2 + A_{23}X_3 = B'_2 \\ A_{23}^{\mathrm{T}}X_2 + A_{33}X_3 = B_3 \end{cases}$$

şi va avea acum dimensiunea $(n\text{-}q)$.

Acest sistem poate fi scris simplificat sub forma:

$$\underset{(n-q,n-q)}{A^{(1)}} \cdot \underset{(n-q,1)}{X^{(1)}} = \underset{(n-q,1)}{B^{(1)}} \ , \tag{B.66}$$

unde

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} A'_{22} & A_{23} \\ A_{23}^{\mathrm{T}} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad X^{(1)} = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \quad B^{(1)} = \begin{pmatrix} B'_2 \\ B_3 \end{pmatrix} .$$

Indicele superior din relaţia (B.66) indică etapa de partiţionare. Mai trebuie remarcat faptul că în urma eliminării primelor q ecuaţii şi a primelor q necunoscute, matricea coeficienţilor $A^{(1)}$ va păstra structura bandă şi lăţimea benzii.

În continuare, în etapa a doua, sistemul (B.66) este partiţionat în mod asemănător şi se va obţine sistemul:

$$\underset{(n-2q,n-2q)}{A^{(2)}} \cdot \underset{(n-2q,1)}{X^{(2)}} = \underset{(n-2q,1)}{B^{(2)}}$$

având cu $2q$ ecuaţii şi cu $2q$ necunoscute mai puţin şi procedeul se va repeta recurent, de unde şi denumirea de **partiţionare recursivă.**

Ultimul set de ecuaţii se obţine în etapa m, unde $m=(n\text{-}p)/q$:

$$\underset{(p,p)}{A^{(m)}} \cdot \underset{(p,1)}{X^{(m)}} = \underset{(p,1)}{B^{(m)}} \ . \tag{B.67}$$

Matricea coeficienţilor $A^{(m)}$ va fi acum o matrice completă de dimensiune p, dar sistemul (B.67) va fi suficient de mic pentru a fi rezolvat direct, obţinându-se ultimele p necunoscute:

Scanned with OKEN Scanner

$$X^{(m)} = \left(A^{(m)}\right)^{-1} B^{(m)} . \qquad \text{(B.68)}$$

Celelalte grupe de câte q necunoscute se vor determina prin substituţie inversă (ca la metoda Gauss clasică) pe baza relaţiei (B.65):

$$X_1^{(m-1)} = \left(A_{11}^{(m-1)}\right)^{-1}\left(B_1^{(m-1)} - A_{12}^{(m-1)} X^{(m)}\right) \quad \text{etc.} \qquad \text{(B.69)}$$

Pentru obţinerea tuturor componentelor soluţiei se vor parcurge de asemenea m etape. Trebuie remarcat că şi pe parcursul acestor operaţii se va păstra structura bandă a matricei A, precum şi lăţimea benzii. De asemenea, referitor la matricea inversă se pot face câteva observaţii.

Dacă se notează cu C_{ij} elementele inversei matricei reduse $A^{(k)}$ la etapa k (şi care au aceleaşi dimensiuni ca şi elementele corespunzătoare A_{ij})

$$\left(A^{(k)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12}^{\mathrm{T}} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13}^{\mathrm{T}} & C_{23}^{\mathrm{T}} & C_{33} \end{pmatrix},$$

din egalitatea

$$A^{(k)}\left(A^{(k)}\right)^{-1} = I^{(k)}$$

rezultă următoarele formule prin care pot fi calculate submatricele C_{12} şi C_{11}:

$$C_{12} = -A_{11}^{-1} A_{12} C_{22} , \qquad \text{(B.70)}$$

$$C_{11} = A_{11}^{-1}\left(I - A_{12} C_{12}^{\mathrm{T}}\right) . \qquad \text{(B.71)}$$

Aceste relaţii se utilizează recursiv în cadrul fiecărei etape a procesului de substituţie inversă, adăugând matricei inverse câte q linii la fiecare etapă.

Algoritmul prezentat aici poate fi uşor extins pentru a se calcula întreaga matrice inversă A^{-1}.

Totuşi, având în vedere că inversa prezintă interes mai ales pentru calculul preciziilor, va fi suficient să se determine inversele submatricelor din zona diagonală. Pe de altă parte, restrângând calculele la elementele din banda diagonală, rezultă importante economii de memorie şi de timp de calcul, fără a influenţa precizia de calcul. Şi aşa însă, calculând doar parţial inversa, aceasta necesită un timp aproximativ dublu faţă de calculul soluţiei sistemului.

Scanned with OKEN Scanner

d. Metode iterative de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare

Fie sistemul de ecuaţii (B.45). Matricea coeficienţilor A poate fi scrisă ca o sumă de matrice de forma:

$$A = T_o + D_g + S_o \,, \tag{B.72}$$

unde T_o şi S_o sunt matrice inferior şi respectiv superior triunghiulare, având zerouri pe diagonala principală ($a_{ii} = 0$, i=1,...,n).

Prin urmare, sistemul (B.45) devine:

$$(T_o + D_g + S_o)\, x = b \quad . \tag{B.73}$$

d_1. Metoda Jacobi (metoda iteraţiei cu pas complet)

Pe baza relaţiei (B.73) se obţine următoarea formulă iterativă:

$$D_g\, x^{(i)} = b - \left(T_o + S_o\right) x^{(i-1)} \,,$$

de unde rezultă:

$$x^{(i)} = D_g^{-1}\left(b - \left(T_o + S_o\right) x^{(i-1)}\right) \,, \tag{B.74}$$

i fiind numărul iteraţiei.

Având în vedere că D_g este o matrice diagonală (cu elementele a_{ii}), inversa acesteia va fi tot o matrice diagonală ale cărei elemente vor fi $1/a_{ii}$. Dacă se împarte însă fiecare ecuaţie a sistemului cu elementul corespunzător de pe diagonala principală a matricei coeficienţilor, matricea D_g devine I (matricea unitate) şi prin urmare factorul D_g^{-1} va dispare din relaţia (B.74). În prealabil este recomandabil să se reordoneze ecuaţiile sistemului pentru a aduce coeficienţii mai mari pe diagonala principală.

d_2. Metoda Gauss - Seidel (metoda iteraţiei cu pas simplu)

Pornind tot de la relaţia (B.73), se poate obţine următoarea formulă iterativă:

$$\left(T_o + D_g\right) x^{(i)} = b - S_o\, x^{(i-1)} \,,$$

de unde rezultă

$$D_g x^{(i)} = b - T_o x^{(i)} - S_o x^{(i-1)}$$

şi apoi, înmulţind la stânga cu $D^{-1}{}_g$,

$$x^{(i)} = D_g^{(-1)}\left(b - T_o x^{(i)} - S_o x^{(i-1)}\right) , \qquad \text{(B.75)}$$

i fiind numărul iteraţiei.

Faţă de metoda anterioară, termenul $T_o\, x^{(i)}$ (care apare în locul termenului $T_o\, x^{(i-1)}$) face ca fiecare nouă valoare (îmbunătăţită) a fiecărei necunoscute să fie folosită imediat în ecuaţiile următoare ale sistemului în cadrul aceleiaşi iteraţii. În consecinţă, metoda Gauss - Seidel va converge mai repede decât metoda Jacobi.

Pe de altă parte, trebuie menţionat că observaţiile din paragraful anterior referitoare la matricea D_g sunt valabile şi aici.

În ceea ce priveşte convergenţa, se poate spune că metoda Gauss - Seidel va converge dacă elementele de pe diagonàla principală a matricei A sunt predominante, adică:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad , \quad i=1,\ldots,n , \qquad \text{(B.76)}$$

cu inegalitate strictă pentru cel puţin o linie a matricei.

Se poate formula însă o altă condiţie de convergenţă, care ne interesează în mod deosebit, fiind indeplinită de orice sistem de ecuaţii normale şi anume: metoda Gauss - Seidel va converge dacă matricea coeficienţilor A este pozitiv definită.

d3. Metoda suprarelaxării succesive

Acest procedeu se bazează pe metoda Gauss - Seidel, urmărind însă convergenţa mai rapidă a iteraţiilor, prin introducerea unui "factor de accelerare" ω care va exagera corecţiile de la o iteraţie la alta. Valoarea optimă a acestui factor ($1<\omega<2$) care să conducă la un număr minim de iteraţii este totuşi dificil de stabilit pentru diferitele situaţii concrete, ceea ce limitează aplicabilitatea metodei.

Fie $\bar{x}^{(i)}$ soluţia obţinută în iteraţia *i* prin metoda Gauss - Seidel (considerată nesatisfăcătoare):

$$\bar{x}^{(i)} = D_g^{-1}\left(b - T_o x^{(i)} - S_o x^{(i-1)}\right) . \qquad \text{(B.77)}$$

Dacă se notează

$$\Delta x^{(i-1)} = \bar{x}^{(i)} - x^{(i-1)} , \qquad \text{(B.78)}$$

atunci, prin introducerea factorului de accelerare ω se obţine:

$$x^{(i)} = x^{(i-1)} + \omega\,\Delta x^{(i-1)}$$

şi ţinând seama de relaţiile (B.77) şi (B.78) rezultă:

$$x^{(i)} = x^{(i-1)} + \omega\left(D_g^{-1}\left(b - T_o\,x^{(i)} - S_o\,x^{(i-1)}\right) - x^{(i-1)}\right). \qquad \text{(B.79)}$$

Dacă ecuaţiile iniţiale sunt reordonate şi împărţite cu elementele corespunzătoare de pe diagonala principală, atunci factorul D_g^{-1} va dispare şi relaţia (B.79) devine:

$$x^{(i)} = x^{(i-1)} + \omega\left(b - T_o\,x^{(i)} - S_1\,x^{(i-1)}\right). \qquad \text{(B.80)}$$

e. Rezolvarea sistemelor mari partiţionate prin metode iterative

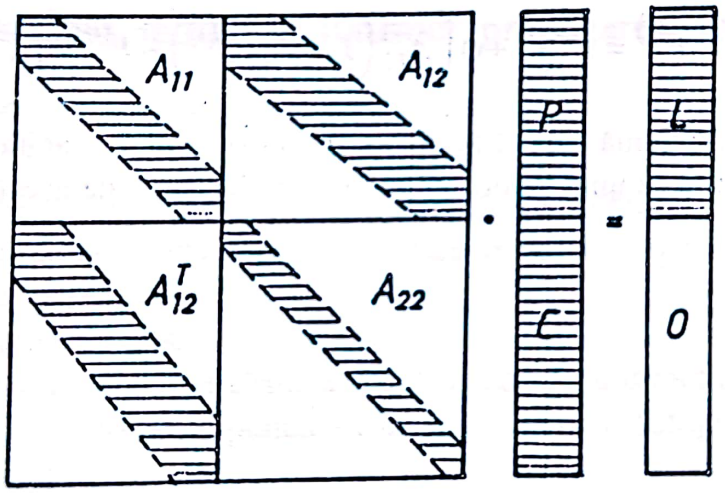

Figura B.7. Reprezentarea schematică a unui sistem partiţionat (din fotogrammetrie).

Se va face referire aici doar la un caz particular întâlnit în fotogrammetrie şi în care sistemul de ecuaţii normale poate fi reprezentat schematic, după cum se arată în figura B.7.

După cum se observă, apar două tipuri de necunoscute (grupate corespunzător) şi anume: parametrii de orientare P şi coordonatele punctelor de aerotriangulaţie C.

Partiţionat conform figurii B.7, sistemul de ecuaţii poate fi scris sub forma:

$$\begin{cases} A_{11}\,P + A_{12}\,C = L \\ A_{12}^{T}\,P + A_{22}\,C = O \end{cases}. \qquad \text{(B.81)}$$

Aplicând metoda Gauss - Seidel acestui sistem, se obţin următoarele formule iterative:

$$P^{(i)} = A_{11}^{-1}\left(L - A_{12}C^{(i-1)}\right), \tag{B.82}$$

$$C^{(i)} = -A_{22}^{-1}A_{12}^{T}P^{(i)}. \tag{B.83}$$

Având în vedere structura particulară a matricelor pătrate A_{11} şi A_{22} (conţinând submatrice nenule doar pe diagonala principală), rezultă că inversarea acestora reprezintă o problemă foarte simplă.

Deoarece această metodă necesită totuşi un număr mare de iteraţii, se recomandă utilizarea factorului de accelerare ω, adică a metodei suprarelaxării succesive. În acest caz, formulele iterative sunt:

$$C^{(i)} = C^{(i-1)} + \omega\left(-A_{22}^{-1}A_{12}^{T}P^{(i-1)} - C^{(i-1)}\right), \tag{B.84}$$

$$P^{(i)} = P^{(i-1)} + \omega\left(A_{11}^{-1}\left(L - A_{12}C^{(i)}\right) - P^{(i-1)}\right). \tag{B.85}$$

Singura problemă mai dificilă va fi (după cum s-a arătat şi în paragraful anterior) determinarea unei valori optime pentru factorul de accelerare ω.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

ANEXA C

ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂŢILOR, STATISTICĂ MATEMATICĂ ŞI METODA PĂTRATELOR MINIME

C.1. Erori de măsurare, indicatori statistici, propagarea erorilor

C.1.1. Clasificarea măsurătorilor

Măsurătorile se pot clasifica din mai multe puncte de vedere:

a. **După modul de obţinere a mărimii fizice** se pot distinge:

- **măsurători directe** şi
- **măsurători indirecte.**

În cazul măsurătorilor directe, mărimea fizică se compară direct cu unitatea de măsură. De exemplu, coordonatele punctelor-imagine de pe o fotogramă pot fi măsurate direct la un comparator.

De asemenea, se consideră ca măsurători directe, şi funcţii simple ale unor astfel de măsurători, cum ar fi diferenţa a două mărimi măsurate direct, sau produsul unei mărimi măsurate direct, cu o constantă.

Un caz special de măsurători directe îl reprezintă măsurătorile condiţionate, adică acele măsurători directe care trebuie să satisfacă unele condiţii geometrice sau analitice. De exemplu, suma mărimilor unghiurilor unui triunghi plan (măsurate direct) trebuie să fie 200^g (180^o).

În cazul măsurătorilor indirecte, mărimea fizică se obţine prin intermediul unei/unor alte mărimi măsurate direct, funcţional dependente de ea. De exemplu, coordonatele-teren X_j, Y_j, Z_j ale unui punct din spaţiul-obiect se determină pe baza coordonatelor-imagine corespunzătoare, măsurate pe două sau mai multe fotograme.

b. **După condiţiile de precizie** în care sunt executate,măsurătorile pot fi:

- **măsurători de aceeaşi precizie** sau,
- **măsurători de precizii diferite (ponderate).**

Măsurătorile se pot considera de aceeaşi precizie dacă s-au efectuat cu acelaşi instrument, de către acelaşi operator, prin aceeaşi metodă şi în aceleaşi condiţii. În cazul în care unul din aceşti factori diferă, nu se mai poate acorda tuturor măsurătorilor aceeaşi încredere şi deci vor avea precizii diferite.

c. **După influenţa reciprocă** a măsurătorilor, se pot distinge:
- **măsurători dependente** şi
- **măsurători independente.**

Dacă ansamblul condiţiilor în care se efectuează o măsurătoare influenţează total sau parţial rezultatul altei măsurători, se spune că acestea sunt dependente între ele, iar în caz contrar sunt independente. Dependenţa (corelaţia) între mărimi se exprimă cu ajutorul unui coeficient empiric de corelaţie dedus experimental pe cale statistică, efectuând mai multe măsurători.

d. **După gradul de necesitate**, măsurătorile pot fi:
- **măsurători necesare** sau,
- **măsurători suplimentare.**

Numărul minim de măsurători cu ajutorul cărora se poate obţine valoarea mărimii fizice considerate constituie categoria măsurătorilor necesare. Dacă pentru ridicarea preciziei, sau pentru depistarea unor greşeli care pot apare în procesul de măsurare se execută un surplus de măsurători, acestea se numesc măsurători suplimentare şi reprezintă numărul gradelor de libertate.

C.1.2. Tipuri de erori de măsurare

Eroarea de măsurare se defineşte ca diferenţa între valoarea măsurată şi o valoare nominală (de referinţă).

După modul în care se alege valoarea nominală, erorile pot fi:
- **erori reale** sau,
- **erori aparente/probabile/reziduale.**

Eroarea reală (ε_i) a unei măsurători (l_i) se defineşte în raport cu valoarea reală (L) a mărimii respective (considerată ca valoare nominală):

$$\varepsilon_i = l_i - L \ . \qquad \text{(C.1)}$$

Având în vedere că valoarea adevărată nu o putem cunoaşte, eroarea reală are doar o semnificaţie teoretică.

Dacă se consideră ca valoare de referinţă valoarea probabilă ($\overline{L}$) a mărimii respective, atunci eroarea corespunzătoare (v_i) se va numi eroare probabilă/aparentă/reziduală:

$$v_i = l_i - \overline{L} \ . \qquad \text{(C.2)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Valoarea probabilă a unei mărimi poate fi media aritmetică (în cazul măsurătorilor de aceeaşi precizie) sau media ponderată (în cazul măsurătorilor de precizii diferite).

După caracterul lor, erorile se pot clasifica în:

- **erori evitabile** şi
- **erori inevitabile.**

Erorile evitabile sunt erori mari (greşeli) datorite neatenţiei operatorului şi care pot fi detectate destul de uşor prin măsurarea repetată a aceleiaşi mărimi. Aceste erori vor trebui obligatoriu eliminate înaintea calculelor de compensare.

Erorile inevitabile pot fi de două feluri:

- **erori sistematice** şi
- **erori întâmplătoare.**

Erorile sistematice se caracterizează prin aceea că acţionează după anumite legi. Cunoscând aceste legi, erorile sistematice vor trebui eliminate prin următoarele mijloace:

- prin metoda de măsurare,
- prin calcul,
- prin calibrarea periodică a aparatelor, sau/şi
- prin reducerea ponderilor unor măsurători.

Erorile întâmplătoare au în general mărimi mici, dar au un semn aleator. Ele pot fi diminuate prin efectuarea mai multor măsurători. În cazul unui număr mare de măsurători, pot fi aplicate principiile din teoria probabilităţilor şi statistică matematică.

Trebuie menţionat că la aplicarea metodei pătratelor minime, măsurătorile se consideră afectate numai de erori întâmplătoare, celelalte erori (greşeli, erori sistematice) trebuind eliminate în prealabil.

C.1.3. Evaluarea statistică a măsurătorilor directe

a. Măsurători de aceeaşi precizie

Fie $l_1, l_2, \ldots, l_n$ valorile obţinute prin măsurarea repetată a aceleiaşi mărimi (având valoarea reală L). Valoarea cea mai probabilă a acestor mărimi este dată de media aritmetică a măsurătorilor l_i:

$$\overline{L} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i}{n} \quad . \tag{C.3}$$

Se poate calcula de asemenea **varianţa** acestui set de observaţii:

$$m^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1} , \qquad (C.4)$$

precum şi **abaterea standard**, sau **eroarea medie pătratică a unei singure măsurători:**

$$m = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}} ,$$

sau folosind notaţia Gauss pentru sumă,

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} . \qquad (C.5)$$

Eroarea standard a mediei aritmetice se poate obţine cu formula:

$$m_{\overline{L}} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n(n-1)}} = \frac{m}{\sqrt{n}} . \qquad (C.6)$$

Se poate stabili de asemenea o eroare maximă ca o limită peste care erorile vor fi considerate greşeli şi observaţiile corespunzătoare vor fi eliminate. Ca **eroare limită/maximă** se consideră de obicei triplul abaterii standard:

$$\underline{m} = 3\, m . \qquad (C.7)$$

În fine, va trebui subliniat că între precizie şi exactitate (acurateţe) se poate face o distincţie ca sens. Astfel, **precizia** exprimă gradul de repetabilitate al unei măsurători. Adică, o măsurătoare se consideră de înaltă precizie dacă valoarea sa poate fi repetată cu o mică toleranţă, prin mai multe măsurători. **Exactitatea (acurateţea)** exprimă însă gradul de apropiere a valorii măsurate faţă de valoarea reală. Totuşi, în cazul absenţei erorilor sistematice, cei doi termeni au acelaşi sens.

b. Măsurători ponderate

Fie $l_1, l_2, \ldots, l_n$ valorile obţinute prin măsurarea repetată a unei mărimi, dar cu precizii diferite, $m_1, m_2, \ldots, m_n$ fiind erorile corespunzătoare. Pentru a deduce valoarea cea mai probabilă a mărimii respective, se va reduce cazul măsurătorilor ponderate la măsurători fictive de aceeaşi precizie. Prin urmare, fiecare valoare l_i se va considera ca reprezentând media aritmetică a p_i măsurători fictive de aceeaşi

precizie, iar m_i va fi eroarea standard a mediei aritmetice corespunzătoare şi, conform relaţiei (C.6), se poate scrie:

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}} , \qquad (C.8)$$

unde μ este eroarea medie pătratică (standard) a unei măsurători fictive (având ponderea p=1), numindu-se în consecinţă **eroarea unităţii de pondere.** Expresia acestei erori se deduce din (C.5):

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} . \qquad (C.9)$$

Valoarea cea mai probabilă a mărimii măsurate va fi dată de media aritmetică a tuturor măsurătorilor fictive:

$$\overline{L} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i l_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} ,$$

sau, în notaţie Gauss,

$$\overline{L} = \frac{[p \cdot l]}{[p]} . \qquad (C.10)$$

De asemenea, se poate deduce **eroarea medie pătratică a mediei ponderate:**

$$m_{\overline{L}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} . \qquad (C.11)$$

În ceea ce priveşte determinarea ponderilor, având în vedere că în locul valorilor rezultate din (C.8):

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2} \qquad (C.12)$$

se pot lua nişte numere proporţionale cu acestea, se poate scrie:

$$p_i = \frac{K}{m_i^2} , \qquad (C.13)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde constanta de proporţionalitate K se alege (de obicei) astfel încât ponderile p_i să fie numere întregi.

C.1.4. Legea propagării erorilor

Fie F o funcţie diferenţiabilă de n mărimi independente, măsurate direct $F(L_1,L_2,...,L_n)$. Vom presupune de asemenea că pentru fiecare mărime L_i s-au efectuat câte k măsurători.

Varianţa funcţiei F în raport cu varianţele mărimilor L_i se poate exprima prin relaţia:

$$m_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{\partial F}{\partial L_i} \right)^{o} \right)^2 m_i^2 \ , \qquad \text{(C.14)}$$

unde indicele superior " ^{o} " arată că derivatele parţiale se particularizează pentru valorile medii ale mărimilor L_i (rezultate din k măsurători).

De aici se poate deduce **eroarea unei funcţii de mărimi independente măsurate direct:**

$$m_F = \pm \sqrt{\left[\left(\left(\frac{\partial F}{\partial L} \right)^{o} \right)^2 m^2 \right]} \ , \qquad \text{(C.15)}$$

care se mai numeşte şi **legea de propagare a erorilor.** Uneori însă, prin acest termen se înţelege varianţa m_F^2 (C.14).

În ceea ce priveşte ponderea funcţiei, aceasta se defineşte similar ponderii unei mărimi dată de (C.12):

$$p_F = \frac{\mu^2}{m_F^2} \ . \qquad \text{(C.16)}$$

În general este însă mai comod a se calcula inversa ponderii:

$$\frac{1}{p_F} = \frac{m_F^2}{\mu^2} \ . \qquad \text{(C.17)}$$

Substituind aici m_F^2 din (C.14):

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{1}{p_F}=\frac{1}{\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial F}{\partial L_i}\right)^o\right)^2 m_i^2$$

şi apoi m_i^2 din (C.12), rezultă:

$$\frac{1}{p_F}=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial F}{\partial L_i}\right)^o\right)^2\frac{1}{p_i}\ . \qquad \text{(C.18)}$$

C.1.5. Variabile aleatoare discrete

Deoarece erorile de măsurare au un caracter întâmplător (aleator), ele pot fi studiate cu ajutorul teoriei probabilităţilor şi a statisticii matematice, urmărindu-se determinarea valorii celei mai probabile a mărimii măsurate.

Probabilitatea reprezintă o măsură a posibilităţii ca un anumit eveniment să apară sau ca o variabilă aleatoare să ia o anumită valoare şi se referă întotdeauna la un experiment.

În cazul frecvent al evenimentelor elementare echiprobabile, **probabilitatea** unui eveniment A se defineşte ca raport între numărul cazurilor favorabile lui A şi numărul total al cazurilor posibile ale experimentului:

$$P(A)=\frac{m}{n}\ . \qquad \text{(C.19)}$$

Probabilitatea unui eveniment întâmplător este cuprinsă între 0 şi 1, fiind 0 în cazul evenimentului imposibil şi 1 în cazul evenimentului sigur.

Prin **variabilă aleatoare** se înţelege o mărime care în funcţie de rezultatul unui experiment poate lua o valoare dintr-o mulţime bine definită de valori posibile. Variabilele aleatoare pot fi de două tipuri:

- **variabilă aleatoare discretă**, care poate lua numai valori izolate, numărul valorilor posibile considerându-se în general a fi finit, şi
- **variabilă aleatoare continuă** ale cărei valori posibile sunt cuprinse într-un interval finit sau infinit şi prin urmare numărul acestor valori este întotdeauna infinit.

Fie o variabilă aleatoare discretă X care poate lua valorile $x_1,x_2,...,x_n$ respectiv cu probabilităţile $p_1,p_2,...,p_n$. Tabloul ce conţine aceste mărimi în forma:

$$X\begin{pmatrix}x_i\\P_i\end{pmatrix},\quad i=1,...,n\ , \qquad \text{(C.20)}$$

defineşte **distribuţia** sau **repartiţia** variabilei X.

Egalităţile de forma $X = x_i$ sunt evenimente. Se poate observa că

$$0 \le P(X = x_i) \le 1 \qquad \text{(C.21)}$$

şi

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1 \ , \qquad \text{(C.22)}$$

sau

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \ . \qquad \text{(C.23)}$$

Fiind date două variabile aleatoare X şi Y, suma lor va fi variabila $Z=X+Y$, care ia valoarea x_i+y_j, cu probabilitatea p_{ij} de realizare simultană a egalităţilor $X=x_i$, $Y=y_j$:

$$Z\begin{pmatrix} x_i + y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix} . \qquad \text{(C.24)}$$

Probabilitatea p_{ij} se mai notează $P(X = x_i, Y = y_j)$ sau, $P_{XY}(x_i,y_j)$. Această probabilitate va trebui să satisfacă de asemenea condiţiile de forma (C.21) şi (C.22), respectiv (C.23):

$$0 \le P_{XY}(x_i, y_j) \le 1 \qquad \text{(C.25)}$$

şi

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P_{XY}(x_i, y_j) = 1 \ , \qquad \text{(C.26)}$$

sau

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1 \ . \qquad \text{(C.27)}$$

În mod similar, se defineşte produsul a două variabile aleatoare $Z = XY$:

$$Z\begin{pmatrix} x_i y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix} , \qquad \text{(C.28)}$$

unde p_{ij} are aceeaşi semnificaţie ca şi în cazul anterior.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă variabilele aleatoare X şi Y sunt independente, adică pentru orice i şi j evenimentele $(X = x_i)$ şi $(Y = y_j)$ sunt independente, atunci

$$p_{ij} = P_{XY}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j) = P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \\ = P(X = x_i)\, P(Y = y_j) = P_X(x_i)\, P_Y(y_j) \quad . \tag{C.29}$$

Toate acestea se pot extinde pentru un număr oarecare de variabile aleatoare.

Fiind dată o variabilă aleatoare X cu distribuţia (C.20), **valoarea medie** a acestei variabile va fi definită de numărul:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \quad . \tag{C.30}$$

Se pot menţiona următoarele proprietăţi ale mediei:

1) $M(a) = a$, a fiind o constantă
2) $M(a + X) = a + M(X)$
3) $M(aX) = a\, M(X)$
4) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$
5) $M(XY) = M(X)\, M(Y)$, dacă X şi Y sunt independente.

Fiind dată o variabilă aleatoare X, se va numi **moment de ordinul** k al acestei variabile, valoarea medie a variabilei X^k, adică:

$$M_k(X) = M(X^k) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^k \quad . \tag{C.31}$$

Variabila $X - M(X)$ se numeşte abaterea (de la medie a) variabilei X. Prin **moment centrat de ordinul** k al variabilei aleatoare X, se înţelege media

$$\mu_k = M(X - M(X))^k \quad . \tag{C.32}$$

În particular, dacă $k = 1$ se obţine valoarea medie a abaterii, care este nulă:

$$M(X - M(X)) = M(X) - M(X) = 0 \quad .$$

În consecinţă, această valoare nu poate caracteriza împrăştierea valorilor variabilei aleatoare în jurul valorii medii. Ca măsură a împrăştierii se poate folosi însă momentul centrat de ordinul doi ($k = 2$), numit **dispersie:**

$$D^2(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2) - M^2(X) \quad . \tag{C.33}$$

Se pot menţiona următoarele proprietăţi ale dispersiei:

Scanned with OKEN Scanner

1) $D^2(a) = 0$, a fiind o constantă
2) $D^2(aX) = a^2 D^2(X)$
3) $D^2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D^2(X_i)$

Totuşi, gradul de împrăştiere a unei variabile aleatoare X se exprimă de obicei nu prin dispersie, ci prin **abaterea medie pătratică** $D(X)$ notată cu:

$$\sigma = D(X) = \sqrt{D^2(X)} = \sqrt{M\left(X^2\right) - M^2(X)} \quad . \qquad \text{(C.34)}$$

Aceasta prezintă avantajul că se exprimă în aceleaşi unităţi de măsură ca şi variabila X.

Principalele proprietăţi ale abaterii medii pătratice sunt similare proprietăţilor dispersiei:

1) $D(a) = 0$, a fiind o constantă
2) $D(aX) = aD(X)$
3) $D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D^2(X_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}$

C.1.6. Variabile aleatoare continue

În fotogrammetrie, variabilele aleatoare (ca de exemplu erorile întâmplătoare la măsurarea coordonatelor) pot lua orice valoare într-un anumit interval. După cum s-a arătat la începutul paragrafului anterior, o astfel de variabilă aleatoare se numeşte continuă. Pentru a extinde la acest tip de variabile proprietăţile referitoare la variabilele discrete, se va defini mai întâi funcţia de repartiţie.

Funcţia $F: \boldsymbol{R} \rightarrow [0,1]$, exprimată prin relaţia:

$$F(x) = P(X < x) \quad , \qquad \text{(C.35)}$$

se numeşte **funcţie de repartiţie** a variabilei aleatoare X.

Trebuie precizat că funcţia de repartiţie nu se ataşează numai variabilelor de tip continuu, dar ea prezintă interes deosebit pentru aceste variabile.

Principalele proprietăţi ale funcţiilor de repartiţie sunt:

1) $0 \le F(x) \le 1$
2) $F(x_1) \le F(x_2)$, dacă $x_1 < x_2$,
   adică, funcţia de repartiţie este o funcţie nedescrescătoare;
3) Dacă valorile posibile ale variabilei aleatoare X sunt cuprinse

Scanned with OKEN Scanner

în intervalul (a,b), atunci:

$$F(x) = 0 \text{ pentru } x \leq a \ ,$$

$$F(x) = 1 \text{ pentru } x \geq b$$

şi în consecinţă

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

şi

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \ .$$

Se numeşte **densitate de probabilitate**, prima derivată (dacă aceasta există) a funcţiei de repartiţie:

$$f(x) = F'(x) \ . \qquad \text{(C.36)}$$

Fiind derivata unei funcţii nedescrescătoare, rezultă că $f(x) \geq 0$. Pe de altă parte, $F(x)$ este o primitivă a densităţii de probabilitate:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx + C \ . \qquad \text{(C.37)}$$

Constanta de integrare va fi însă zero, având în vedere proprietăţile funcţiilor de repartiţie. Conform aceloraşi proprietăţi, dacă $x \to \infty$ se obţine:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \ . \qquad \text{(C.38)}$$

Probabilitatea ca variabila aleatoare continuă X să ia o valoare în intervalul (x_1,x_2) este dată de relaţia:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \ . \qquad \text{(C.39)}$$

De asemenea, se pot defini unele valori tipice ale variabilelor aleatoare continue prin analogie cu cazul variabilelor discrete. Astfel, **valoarea medie a unei variabile aleatoare continue** X care ia valori în intervalul (a,b) şi a cărei densitate de probabilitate este $f(x)$ este dată de relaţia:

Scanned with OKEN Scanner

$$M(X)=\int_a^b xf(x)\,dx \quad . \tag{C.40}$$

Similar, **dispersia pentru o variabilă aleatoare continuă** va fi:

$$D^2(X)=\int_a^b \big(x-M(x)\big)^2 f(x)dx \quad . \tag{C.41}$$

Momentul de ordinul k se exprimă în acest caz prin relaţia:

$$M_k=\int_a^b x^k f(x)dx \quad , \tag{C.42}$$

iar **momentul centrat de ordinul** k va fi

$$\mu_k=\int_a^b \big(x-M(x)\big)^k f(x)dx \quad . \tag{C.43}$$

În fine, trebuie menţionat că proprietăţile mediei şi dispersiei variabilelor discrete se păstrează şi în cazul variabilelor aleatoare continue.

C.1.7. Repartiţii utilizate la studiul erorilor

Vor trebui precizate mai întâi proprietăţile erorilor întâmplătoare:

- rezultatele măsurătorilor sunt afectate în mod inerent de erori întâmplătoare;
- abaterea rezultatului unei măsurători de la valoarea reală a mărimii fizice măsurate este cauzată de n factori aleatori;
- cauzele care provoacă erorile întâmplătoare sunt independente între ele;
- probabilitatea de apariţie a erorilor pozitive este egală cu probabilitatea de apariţie a erorilor negative (principiul distributiv);
- erorile întâmplătoare nu pot depăşi în valoare absolută o anumită limită (principiul limitativ);
- erorile cu valoare absolută mică sunt mai numeroase decât cele cu valoare absolută mare (principiul cazualistic).

Scanned with OKEN Scanner

a. Repartiţia (distribuţia) normală

Gauss a ajuns la stabilirea distribuţiei normale căutând legea la care se supun erorile de măsurare. De altfel, din studiile şi verificările ulterioare reiese că distribuţia erorilor întâmplătoare urmează în general legea normală.

Fie o variabilă aleatoare continuă X, având media

$$m = M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad , \tag{C.44}$$

dispersia

$$\sigma^2 = D^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x) dx \tag{C.45}$$

şi densitatea de repartiţie

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad . \tag{C.46}$$

În acest caz, variabila X este o **variabilă aleatoare normală**, iar funcţia ei de repartiţie se numeşte **funcţie de repartiţie normală.** Distribuţia (repartiţia) normală a variabilei X (numită şi distribuţia Gauss) se notează cu simbolul $N(m,\sigma^2)$. Constantele m şi σ sunt parametrii repartiţiei normale.

Graficul funcţiei $f(x)$ depinde de parametrii m şi σ şi are forma unui clopot (curba clopot Gauss). Parametrul m defineşte axa de simetrie, iar σ stabileşte gradul de "turtire" a graficului. Pentru exemplificare, în figura C.1 se prezintă graficele unor funcţii $f(x)$ pentru diferite valori ale lui m şi acelaşi σ, iar în figura C.2 sunt reprezentate graficele corespunzătoare diferitelor valori ale lui σ, pentru m constant (clopotul fiind mai "ascuţit" când σ este mai mic).

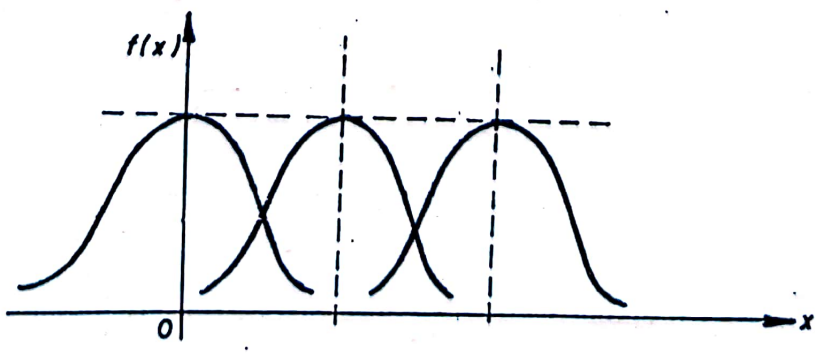

Figura C.1. Variaţia curbei clopot Gauss pentru diferite valori ale lui m.

Scanned with OKEN Scanner

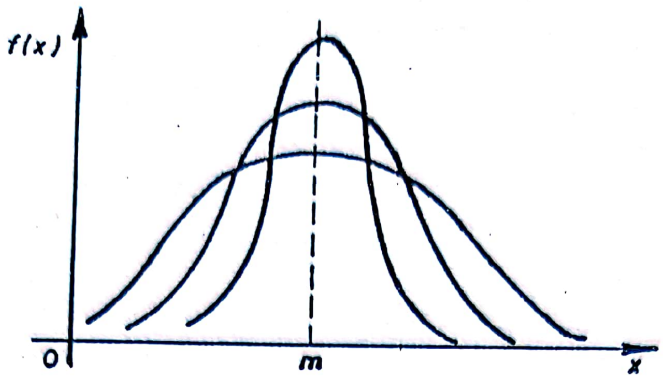

Figura C.2. Variaţia curbei clopot Gauss pentru diferite valori ale lui σ.

Dacă se ia ca axă y axa de simetrie ($x = m$), distribuţia normală va avea forma şi caracteristicile prezentate în figura C.3.

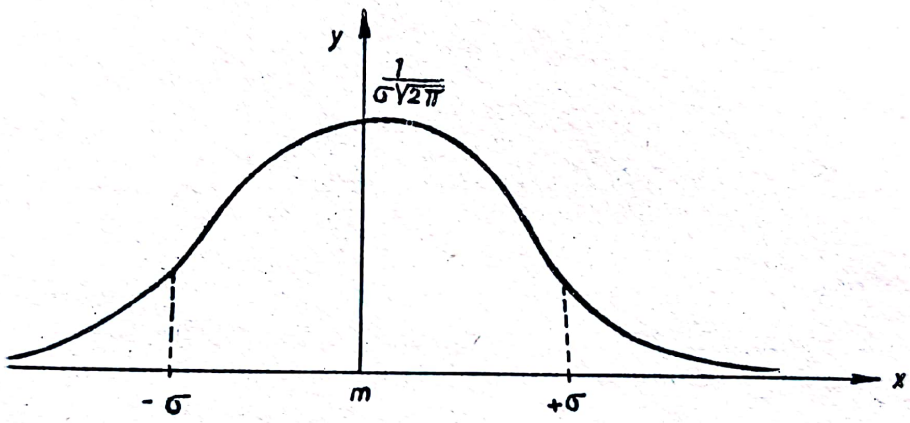

Figura C.3. Distribuţia normală pentru $m = 0$.

În acest caz (pentru $m = 0$), dispersia (C.45) devine

$$\sigma^2 = D^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \ , \qquad \text{(C.47)}$$

iar densitatea de repartiţie va fi

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \ . \qquad \text{(C.48)}$$

Se observă totodată că în origine ($x = m = 0$) funcţia are un maxim egal cu $1/\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)$, deci invers proporţional cu σ, iar punctele de inflexiune vor fi $x=\pm\sigma$ (raportate la originea $x = m = 0$).

De asemenea, se poate remarca faptul că $f(x) > 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, iar aria cuprinsă între curba $y = f(x)$ şi axa x este egală cu unitatea:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \ .$$

În cazul particular $N(0,1)$, adică $m = 0$ şi $\sigma^2 = 1$ **distribuţia normală** se numeşte **standard**, sau **distribuţie normată**. Densitatea de repartiţie va fi în această situaţie

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \ . \qquad \text{(C.49)}$$

De asemenea, dacă X este o variabilă aleatoare având o distribuţie normală $N(m, \sigma^2)$, atunci variabila $Z = X - m/\sigma$ va avea o distribuţie normală standard.

Pe de altă parte, va prezenta interes analizarea probabilităţii ca o eroare întâmplătoare X să ia o valoare cuprinsă în intervalul (x_1,x_2). Conform relaţiilor (C.39) şi (C.46), această probabilitate va fi:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \ . \qquad \text{(C.50)}$$

În cazul distribuţiei normale standard ($m = 0$, $\sigma^2 = 1$), relaţia (C.50) devine:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \ . \qquad \text{(C.51)}$$

Pentru acest caz a fost întocmit un tabel de unde se poate deduce că probabilitatea ca o eroare să fie cuprinsă în intervalul $(-3\sigma, +3\sigma)$ este de 99,73 %. Aceasta a condus la acceptarea practică a mărimii 3σ ca **eroare limită**. În consecinţă, erorile mai mari vor fi considerate greşeli.

Pe de altă parte, trebuie menţionat că o combinaţie liniară de variabile independente cu distribuţii normale reprezintă o variabilă având de asemenea o distribuţie normală.

b. Distribuţia χ^2

Fie n variabile aleatoare independente $x_1,x_2,...,x_n$ repartizate normal standard $N(0,1)$. Suma patratelor lor reprezintă o variabilă aleatoare notată cu simbolul χ^2:

Scanned with OKEN Scanner

$$\chi_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \qquad \text{(C.52)}$$

şi care are o distribuţie χ^2 cu n grade de libertate.

Această variabilă are densitatea de repartiţie:

$$f\left(\chi_n^2\right) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} e^{-\left(\frac{x}{2}\right)}, & pentru\ x>0 \\ 0, & pentru\ x\le 0 \end{cases} \qquad \text{(C.53)}$$

unde funcţia $\Gamma(x)$, $x > 0$, este definită astfel:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \ .$$

Media şi dispersia unei variabile aleatoare având distribuţia χ^2 sunt date de relaţiile:

$$M\left(\chi_n^2\right) = \sum_{i=1}^{n} M\left(x_i^2\right) = n \ , \qquad \text{(C.54)}$$

$$D^2\left(\chi_n^2\right) = \sum_{i=1}^{n} D^2\left(x_i^2\right) = 2n \ . \qquad \text{(C.55)}$$

Reprezentarea grafică a funcţiei $f(\chi_n^2)$ pentru diferite grade de libertate (fig. C.4) arată că pentru valori mici ale lui n curba nu este simetrică, dar când $n>10$ forma ei se apropie tot mai mult de curba clopot Gauss, proprie distribuţiei normale. În consecinţă, distribuţia χ^2 se poate folosi ca test pentru verificarea normalităţii.

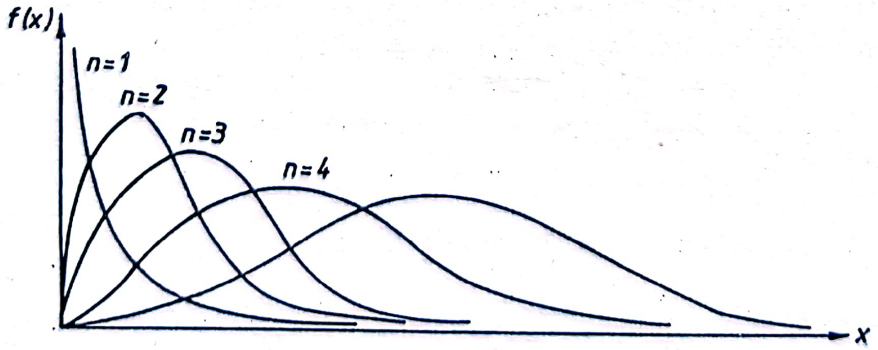

Figura C.4. Reprezentarea distribuţiei χ^2 pentru diferite grade de libertate.

Scanned with OKEN Scanner

c. Distribuţia Student

Fie X şi Y două variabile aleatoare independente, prima având o distribuţie normală standard $N(0,1)$, iar a doua o distribuţie χ^2 cu n grade de libertate. Variabila aleatoare t, definită prin relaţia:

$$t = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} , \qquad \text{(C.56)}$$

are o distribuţie Student cu n grade de libertate.

Curba reprezentând această distribuţie are o formă similară cu cea a distribuţiei normale, dar este mai aplatizată. Pentru valori $n>30$, distribuţia Student poate fi aproximată prin distribuţia normală.

Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt variabile aleatoare normale şi se consideră media şi varianţa acestui set de observaţii conform relaţiilor (C.3), (C.4) şi (C.2):

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} , \quad m^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)}{n-1} ,$$

atunci variabila

$$t = \frac{\bar{x}\sqrt{n}}{m}$$

are o funcţie de repartiţie Student cu $n-1$ grade de libertate.

Densitatea de repartiţie a funcţiei t va fi dată de relaţia:

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}} , \qquad \text{(C.57)}$$

unde funcţia Γ este de forma:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt ,$$

iar $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ şi $\Gamma(1) = 1$.

Pentru n întreg, pozitiv,

$$\Gamma(n) = (n-1)! \text{ , sau } \Gamma(n+1) = n! .$$

În cazul măsurătorilor, distribuţia Student este utilizată frecvent la determinarea intervalului de încredere.

C.2. Compensarea măsurătorilor prin metoda pătratelor minime

C.2.1. Principii de bază

Metoda pătratelor minime este aplicată de 200 de ani ca metodă de prelucrare a datelor experimentale. Ea a fost utilizată mai întâi la prelucrarea observaţiilor astronomice, fiind extinsă apoi în geodezie şi în fotogrammetrie.

Din punctul de vedere al statisticii matematice, metoda pătratelor minime este o metodă de estimare a parametrilor pe baza principiului verosimilităţii maxime. Funcţiile de estimaţie pentru parametri sunt funcţii liniare (dacă nu sunt liniare, se liniarizează). Estimarea parametrilor prin metoda pătratelor minime se bazează pe teorema lui Gauss şi anume: *dintre toate funcţiile de estimaţie absolut corecte ale parametrilor, funcţiile de estimaţie liniare determinate prin metoda pătratelor minime au cea mai mică dispersie.*

Metoda pătratelor minime presupune două ipoteze fundamentale privind natura observaţiilor:

- observaţiile conţin numai erori întâmplătoare cu distribuţie normală;
- observaţiile sunt reciproc independente.

Prin urmare, erorile sistematice şi greşelile se consideră eliminate. Problema care se pune constă în determinarea **valorilor celor mai probabile** ale mărimilor măsurate, adică a valorilor pentru care erorile medii pătratice să fie cât mai mici.

Dacă măsurătorile sunt independente şi deci erorile v_i sunt independente şi distribuite normal, atunci probabilitatea de realizare în ansamblu a acestor erori este egală cu produsul probabilităţilor simple (conform teoremei probabilităţii unei intersecţii de evenimente independente):

$$P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} P(A_i) \quad \text{oricare ar fi} \quad I \subset N$$

$$\text{dacă} \quad A_i \bigcap_{i\neq j} A_j = \varnothing \ .$$

În consecinţă, densitatea de probabilitate a ansamblului acestor erori întâmplătoare este dată de relaţia:

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_n) = f(v_1)\cdot f(v_2)\cdot \ldots \cdot f(v_n) \ .$$

Scanned with OKEN Scanner

Având în vedere că densitatea de repartiție normală pentru fiecare v_i este

$$f(v_i)=\frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v_i^2}{2\sigma_i^2}},$$

conform relației (C.48), rezultă:

$$f(v_1,v_2,...,v_n)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\left(\frac{1}{\sigma_1}\cdot\frac{1}{\sigma_2}\cdot...\cdot\frac{1}{\sigma_n}\right)e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i^2}{\sigma_i^2}}.$$

Cel mai probabil set de erori (v_1,v_2, ... ,v_n) se obține când valoarea acestei funcții este maximă, adică atunci când exponentul este minim:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i^2}{\sigma_i^2}=min\ . \qquad (C.58)$$

Dacă p_i este ponderea unei observații l_i:

$$p_i=\frac{\sigma_o^2}{\sigma_i^2}, \qquad (C.59)$$

unde σ_o^2 este varianța unității de pondere, atunci introducând constanta σ_o^2 în relația (C.58), aceasta se va putea scrie sub forma:

$$\sum_{i-1}^{n}p_iv_i^2=min\ ,$$

sau utilizând notația Gauss pentru sumă

$$\left[pv^2\right]=min\ . \qquad (C.60)$$

În cazul măsurătorilor de aceeași precizie

$$p_1=p_2=...=p_n\cdot 1$$

și prin urmare, condiția (C.60) devine:

$$\left[v^2\right]=min\ . \qquad (C.61)$$

Deci, valorile cele mai probabile ale erorilor și în consecință și ale mărimilor măsurate se obțin atunci când suma pătratelor erorilor este minimă. De aici provine de altfel și denumirea de **metodă a pătratelor minime**, sau (printr-o traducere mai

puţin inspirată dar larg utilizată) de **metodă a celor mai mici pătrate.** De fapt, denumirea corectă ar fi: metoda minimizării sumei pătratelor erorilor.

C.2.2. Compensarea măsurătorilor indirecte

a. Principiul metodei

În cazul măsurătorilor indirecte, valorile mărimilor necunoscute se determină prin intermediul unor mărimi măsurate direct de care sunt dependente funcţional. Fie M o mărime care se măsoară direct şi care poate fi exprimată în funcţie de cele n mărimi necunoscute $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$:

$$M = F(X_1, X_2, \ldots, X_n) \ .$$

Dacă funcţia F este liniară, această relaţie poate fi scrisă sub forma:

$$M = aX_1 + bX_2 + \ldots + hX_n \ . \qquad \text{(C.62)}$$

Din punct de vedere practic, este recomandabil ca pentru mărimile necunoscute să se determine în prealabil valori aproximative şi prin urmare,

$$X_j = X_j^o + dX_j \quad (j=1,\ldots,n) \ , \qquad \text{(C.63)}$$

unde dX_j sunt **corecţiile aproximaţiilor** X_j^o. Înlocuind (C.63) în (C.62), se obţine:

$$M = a\,dX_1 + b\,dX_2 + \ldots + h\,dX_n + \left(a\,X_1^o + b\,X_2^o + \ldots + h\,X_n^o\right) \ .$$

Presupunând că se execută m măsurători independente ale mărimii M, vor rezulta m ecuaţii de forma:

$$M_i^o + v_i = a_i dX_1 + b_i dX_2 + \ldots + h_i dX_n + \left(a_i X_1^o + b_i X_2^o + \ldots + h_i X_n^o\right) \ ,$$

unde v_i sunt **corecţiile valorilor măsurate** M_i^o. Aceste relaţii pot fi scrise (mai convenabil) sub forma:

$$a_i dX_1 + b_i dX_2 + \ldots + h_i dX_n - l_i = v_i \quad (i=1,\ldots,m) \ , \qquad \text{(C.64)}$$

unde

$$l_i = M_i^o - \left(a_i X_1^o + b_i X_2^o + \ldots + h_i X_n^o\right) \ .$$

Scanned with OKEN Scanner

În majoritatea cazurilor însă, funcţia F nu este liniară şi prin urmare va trebui liniarizată prin dezvoltare în serie Taylor, neglijând termenii de ordinul II şi de ordin superior:

$$F\left(X_1^o+dX_1,X_2^o+dX_2,...,X_n^o+dX_n\right)=F\left(X_1^o,X_2^o,...,X_n^o\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial X_1}\right)^o dX_1+\left(\frac{\partial F}{\partial X_2}\right)^o dX_2+...+\left(\frac{\partial F}{\partial X_n}\right)^o dX_n\ , \qquad \text{(C.65)}$$

unde s-au avut în vedere egalităţile de forma (C.63). Se observă de asemenea că derivatele parţiale vor trebui particularizate pentru valorile aproximative ale necunoscutelor.

Dacă se notează:

$$a=\left(\frac{\partial F}{\partial X_1}\right)^o,\quad b=\left(\frac{\partial F}{\partial X_2}\right)^o,\quad \ldots\ ,h=\left(\frac{\partial F}{\partial X_n}\right)^o,$$
$$l=M^o-F\left(X_1^o,X_2^o,\ldots,X_n^o\right)$$

şi se consideră m măsurători independente ale mărimii M, se obţin m relaţii de forma (C.64), care formează **sistemul ecuaţiilor de corecţii.** Având în vedere că pe lângă cele n necunoscute, corecţiile v_i de asemenea nu se cunosc, prelucrarea sistemului de ecuaţii se va face pe baza principiului pătratelor minime, exprimat prin condiţia (C.61). Pentru aceasta, numărul ecuaţiilor de corecţii va trebui să fie mai mare decât numărul de necunoscute ($m>n$). Trebuie precizat că aceste m ecuaţii pot să provină de la una, două, sau mai multe funcţii, care să exprime diferite legături între anumite mărimi ce se măsoară şi cele n mărimi necunoscute (deşi aici, pentru simplificare, s-a considerat cazul unei singure relaţii funcţionale).

b. Prelucrarea măsurătorilor de aceeaşi precizie

Sistemul ecuaţiilor de corecţii (C.64) poate fi scris matriceal sub forma:

$$A\Delta-L=V\ , \qquad \text{(C.66)}$$

folosind notaţiile

$$\underset{(m,n)}{A}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & h_1\\ a_2 & b_2 & \cdots & h_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_m & b_m & \cdots & h_m\end{pmatrix},\quad \underset{(n,1)}{\Delta}=\begin{pmatrix} dX_1\\ dX_2\\ \vdots\\ dX_n\end{pmatrix},\quad \underset{(m,1)}{L}=\begin{pmatrix} l_1\\ l_2\\ \vdots\\ l_m\end{pmatrix},\quad \underset{(m,1)}{V}=\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_m\end{pmatrix},$$

În majoritatea cazurilor însă, funcţia F nu este liniară şi prin urmare va trebui liniarizată prin dezvoltare în serie Taylor, neglijând termenii de ordinul II şi de ordin superior:

$$F\left(X_1^o+dX_1, X_2^o+dX_2, \ldots, X_n^o+dX_n\right)=F\left(X_1^o, X_2^o, \ldots, X_n^o\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial X_1}\right)^o dX_1+\left(\frac{\partial F}{\partial X_2}\right)^o dX_2+\ldots+\left(\frac{\partial F}{\partial X_n}\right)^o dX_n \ , \qquad \text{(C.65)}$$

unde s-au avut în vedere egalităţile de forma (C.63). Se observă de asemenea că derivatele parţiale vor trebui particularizate pentru valorile aproximative ale necunoscutelor.

Dacă se notează:

$$a=\left(\frac{\partial F}{\partial X_1}\right)^o, \quad b=\left(\frac{\partial F}{\partial X_2}\right)^o, \quad \ldots \ , h=\left(\frac{\partial F}{\partial X_n}\right)^o,$$
$$l=M^o-F\left(X_1^o, X_2^o, \ldots, X_n^o\right)$$

şi se consideră m măsurători independente ale mărimii M, se obţin m relaţii de forma (C.64), care formează **sistemul ecuaţiilor de corecţii.** Având în vedere că pe lângă cele n necunoscute, corecţiile v_i de asemenea nu se cunosc, prelucrarea sistemului de ecuaţii se va face pe baza principiului pătratelor minime, exprimat prin condiţia (C.61). Pentru aceasta, numărul ecuaţiilor de corecţii va trebui să fie mai mare decât numărul de necunoscute ($m>n$). Trebuie precizat că aceste m ecuaţii pot să provină de la una, două, sau mai multe funcţii, care să exprime diferite legături între anumite mărimi ce se măsoară şi cele n mărimi necunoscute (deşi aici, pentru simplificare, s-a considerat cazul unei singure relaţii funcţionale).

b. Prelucrarea măsurătorilor de aceeaşi precizie

Sistemul ecuaţiilor de corecţii (C.64) poate fi scris matriceal sub forma:

$$A\Delta-L=V \ , \qquad \text{(C.66)}$$

folosind notaţiile

$$\underset{(m,n)}{A}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & h_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m & b_m & \cdots & h_m \end{pmatrix}, \quad \underset{(n,1)}{\Delta}=\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ \vdots \\ dX_n \end{pmatrix}, \quad \underset{(m,1)}{L}=\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix}, \quad \underset{(m,1)}{V}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix},$$

Scanned with OKEN Scanner

iar condiţia de minim (C.61) va deveni:

$$V^T V = min \quad , \tag{C.67}$$

sau având în vedere (C.66) şi notând expresia rezultată cu Φ

$$\Phi=(A\Delta-L)^T(A\Delta-L)=\left(\Delta^T A^T-L^T\right)(A\Delta-L)=$$
$$=\Delta^T A^T A\Delta-\Delta^T A^T L-L^T A\Delta+L^T L=min \ .$$

Pentru a afla vectorul Δ care minimizează funcţia Φ, va trebui îndeplinită condiţia:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta}=0 \ .$$

Având în vedere proprietatea de idempotenţă a operatorilor de derivare şi de transpunere, precum şi faptul că toţi termenii funcţiei Φ sunt scalari, rezultă:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta}=2A^T A\Delta-A^T L-\left(L^T A\right)^T=2A^T A\Delta-2A^T L=0 \ ,$$

adică

$$A^T A\Delta-A^T L=0 \ . \tag{C.68}$$

În plus, va trebui ca derivata a doua să fie pozitivă.

Derivând funcţia (C.68), adică prima derivată, se obţine:

$$\frac{\partial}{\partial\Delta}\left(A^T A\Delta-A^T L\right)=A^T A \ .$$

Matricea rezultată fiind pozitiv definită (B.59), îndeplineşte deci această condiţie.

Dacă se notează

$$N=A^T A \quad \text{şi} \quad L_N=A^T L \ ,$$

rezultă

$$\underset{(n,n)}{N}\cdot\underset{(n,1)}{\Delta}=\underset{(n,1)}{L_N} \ , \tag{C.69}$$

reprezentând **sistemul de ecuaţii normale**, având matricea coeficienţilor N simetrică şi pozitiv definită şi prin urmare inversabilă. Soluţia matriceală a acestuia va fi:

Scanned with OKEN Scanner

$$\Delta = N^{-1} L_N \ . \qquad \text{(C.70)}$$

Vectorul Δ obţinut astfel conţine valorile cele mai probabile ale corecţiilor dX_j.

Trebuie menţionat că datorită aproximării funcţiei F prin termenii liniari ai seriei Taylor corespunzătoare, corecţiile dX_j se vor determina într-un proces iterativ, la fiecare iteraţie îmbunătăţindu-se aproximaţia anterioară:

$$X_j^i = X_j^{i-1} + dX_j^i \quad (j=1,...,n) \ . \qquad \text{(C.71)}$$

Iteraţiile se vor opri când corecţiile devin nesemnificative, adică

$$\left| dX_j \right| < \varepsilon \quad (j=1,...,n) \ , \qquad \text{(C.72)}$$

unde ε este o toleranţă convenabil aleasă.

În loc de a verifica însă fiecare corecţie dX_j din Δ, este suficient să se considere valoarea maximă:

$$\left| dX_{max} \right| < \varepsilon \ . \qquad \text{(C.73)}$$

Dacă parametrii necunoscuţi sunt de categorii diferite (unghiuri, coordonate etc.), verificarea se face pentru fiecare categorie k în parte:

$$\left| dX_{max}^k \right| < \varepsilon^k \ . \qquad \text{(C.74)}$$

O altă variantă constă în utilizarea ratei de modificare a corecţiilor de la o iteraţie la alta:

$$\left| \frac{dX^i - dX^{i-1}}{dX^i} \right| < \varepsilon' \ . \qquad \text{(C.75)}$$

Condiţiile pot să se refere de asemenea la anumite funcţii conţinând corecţiile, sau grupări (pe categorii) ale acestora. De exemplu, în fotogrammetrie, în locul verificării separate a rotaţiilor ($d\omega, d\varphi, d\kappa$), se poate considera o funcţie de forma:

$$d\omega^2 + d\varphi^2 + d\kappa^2 < \varepsilon'' \qquad \text{(C.76)}$$

sau având în vedere relaţiile dintre coordonatele-teren, coordonatele-imagine şi parametrii de orientare, se poate testa efectul corecţiilor asupra coordonatelor punctelor la scara fotogramei:

$$\Delta x_{max}, \Delta y_{max}, \Delta z_{max} < \varepsilon_1 , \qquad \text{(C.77)}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau la scara planului:

$$\Delta X_{max}\ ,\ \Delta Y_{max}\ ,\ \Delta Z_{max} < \varepsilon_2\ . \tag{C.78}$$

Un alt grup de **criterii privind oprirea iteraţiilor** se referă la eroarea medie pătratică a unităţii de pondere. Aceste criterii se pot prezenta sub următoarele forme:

$$\sigma_o < \delta_1\ , \tag{C.79}$$

$$\left|\sigma_o^i - \sigma_o^{i-1}\right| < \delta_2\ ; \tag{C.80}$$

$$\left|\frac{\sigma_o^i - \sigma_o^{i-1}}{\sigma_o^i}\right| < \delta_3\ , \tag{C.81}$$

unde i reprezintă iteraţia, iar $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ sunt toleranţele corespunzătoare celor 3 cazuri. Problema cea mai dificilă o constituie determinarea valorilor concrete ale acestor toleranţe, care sunt specifice fiecărei aplicaţii (sau categorii de aplicaţii). Trebuie remarcat de asemenea că dintre cele 3 criterii, ultimul (C.81) este cel mai semnificativ privind convergenţa procesului iterativ şi prin urmare este recomandabil de a fi utilizat cu prioritate.

După compensare, principala problemă o constituie estimarea preciziei. În acest scop, se poate calcula **eroarea medie pătratică a unei singure măsurători:**

$$\sigma_o = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{m-n}}\ . \tag{C.82}$$

unde numitorul $(m - n)$ reprezintă redundanţa compensării, adică numărul de ecuaţii suplimentare, iar numărătorul se poate determina pe baza relaţiei (C.64).

De asemenea, se pot obţine **erorile medii pătratice ale necunoscutelor** dX_j:

$$\sigma_j = \sigma_o\sqrt{q_{jj}}\quad (j=1,...,n)\ , \tag{C.83}$$

eroarea medie pătratică σ_o fiind dată de (C.82), iar q_{jj} fiind elementele de pe diagonala principală a matricei

$$Q = N^{-1}\ .$$

Matricea de varianţă-covarianţă a necunoscutelor se poate exprima prin relaţia:

$$\sigma_\Delta = \sigma_o^2 N^{-1}\ , \tag{C.84}$$

sau

$$\sigma_{\Delta} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \qquad \text{(C.85)}$$

c. Prelucrarea măsurătorilor ponderate

Deoarece în relaţia (C.62) apare o singură mărime măsurată M în funcţie de cele n mărimi necunoscute, fiecărei ecuaţii (C.64) îi corespunde o pondere p_i, referitoare la măsurătoarea M_i. Prin urmare, sistemului ecuaţiilor de corecţii (C.66) i se va ataşa matricea ponderilor:

$$\underset{(m,m)}{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_m \end{pmatrix} \qquad \text{(C.86)}$$

care, după cum se observă, este o matrice diagonală.

O consecinţă importantă a modului în care intervin ponderile constă în aceea că ecuaţiile sistemului liniar al corecţiilor nu pot fi multiplicate cu constante diferite, aceasta conducând la modificarea relativă a ponderilor.

Condiţia de minim pentru cazul măsurătorilor ponderate (C.60) poate fi scrisă matriceal sub forma:

$$V^{\mathrm{T}} P\, V = min \ . \qquad \text{(C.87)}$$

adică

$$(A\Delta - L)^{\mathrm{T}} P (A\Delta - L) = min \ .$$

Procedând ca în paragraful anterior se obţine **sistemul de ecuaţii normale:**

$$(A^{\mathrm{T}} P A)\Delta - A^{\mathrm{T}} P L = 0 \ . \qquad \text{(C.88)}$$

Dacă se notează

$$N = A^{\mathrm{T}} P A \quad \text{şi} \quad L_N = A^{\mathrm{T}} P L \ , \qquad \text{(C.89)}$$

sistemul de ecuaţii (C.88) devine:

Scanned with OKEN Scanner

$$\underset{(n,n)}{N} \cdot \underset{(n,1)}{\Delta} = \underset{(n,1)}{L_N}$$

şi are aceeaşi formă (C.69) din paragraful precedent şi evident aceeaşi soluţie (C.70), cu observaţia că N şi L_N conţin acum şi matricea ponderilor P.

Desigur, rămân valabile consideraţiile privind procesul iterativ.

Referitor la estimarea preciziei, va trebui să se ţină seama de modul în care intervin ponderile. În consecinţă, **eroarea medie pătratică a unităţii de pondere** se va calcula cu relaţia:

$$\sigma_o = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{m-n}} \quad , \qquad \text{(C.90)}$$

iar **erorile individuale ale necunoscutelor** dX_j cu relaţia (C.83), unde însă elementele q_{jj} aparţin matricei

$$Q = \left(A^T P A\right)^{-1}$$

şi se numesc **coeficienţi de pondere**, fiind proporţionali cu inversele ponderilor corespunzătoare.

C.2.3. Compensarea măsurătorilor condiţionate

a. Principiul metodei

După cum s-a arătat în paragraful C.1.1, măsurătorile condiţionate reprezintă un caz special de măsurători directe şi anume măsurători care trebuie să satisfacă unele condiţii geometrice sau analitice.

Fie n mărimi $X_1, X_2, \ldots, X_n$, care trebuie să satisfacă r relaţii sau ecuaţii de condiţie, independente între ele, r reprezentând de asemenea numărul mărimilor măsurate suplimentar:

$$\begin{cases} f_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0 \\ f_2(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_r(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0 \end{cases}$$

Presupunând că funcţiile f_i sunt liniare, ele se vor putea scrie sub forma:

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{cases} a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n - a_o = 0 \\ b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots + b_nX_n - b_o = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_1X_1 + r_2X_2 + \ldots + r_nX_n - r_o = 0 \end{cases} \qquad (C.91)$$

Dacă se notează cu l_j valorile măsurate ale celor n necunoscute X_j şi cu v_j corecţiile corespunzătoare, atunci

$$X_j = l_j + v_j \qquad (C.92)$$

şi ecuaţiile (C.91) devin

$$\begin{cases} a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n - w_1 = 0 \\ b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n - w_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_1v_1 + r_2v_2 + \ldots + r_nv_n - w_r = 0 \end{cases} \qquad (C.93)$$

unde

$$w_1 = a_o - (a_1l_1 + a_2l_2 + \ldots + a_nl_n) \quad \text{etc.}$$

Termenii liberi w_i rezultă deci prin înlocuirea valorilor măsurate în ecuaţiile de condiţie şi se numesc *neînchideri* sau *erori de închidere* (ale acestor ecuaţii).

Dacă funcţiile f_i nu sunt liniare atunci, presupunând corecţiile v_j suficient de mici, se va putea aplica liniarizarea prin dezvoltare în serie Taylor, neglijând termenii de ordinul II şi de ordin superior:

$$f_i(l_1+v_1, l_2+v_2, \ldots, l_n+v_n) = f_i(l_1, l_2, \ldots, l_n) + \\ + \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_1}\right)^o v_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_2}\right)^o v_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_n}\right)^o v_n \,, \qquad (C.94)$$

unde s-au avut în vedere egalităţile de forma (C.92). De asemenea, se observă că derivatele parţiale vor trebui calculate pentru valorile măsurate l_j.

Dacă se notează:

$$a_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial X_1}\right)^o , a_2 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial X_2}\right)^o , \ldots , a_n = \left(\frac{\partial f_1}{\partial X_n}\right)^o , w_1 = -f_1(l_1, l_2, \ldots, l_n)$$

.....

$$r_1 = \left(\frac{\partial f_r}{\partial X_1}\right)^o , r_2 = \left(\frac{\partial f_r}{\partial X_2}\right)^o , \ldots , r_n = \left(\frac{\partial f}{\partial X_n}\right)^o , w_r = -f_r(l_1, l_2, \ldots, l_n)$$

se obţine **sistemul ecuaţiilor de condiţie** relativ la corecţiile $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sub forma liniară (C.93).

Trebuie menţionat că numărul ecuaţiilor de condiţie fiind egal cu numărul mărimilor măsurate suplimentar, este mai mic decât numărul necunoscutelor ($r<n$), iar rezolvarea problemei se va face pe baza principiului pătratelor minime, exprimat prin relaţia (C.61).

b. Prelucrarea măsurătorilor de aceeaşi precizie

Sistemul ecuaţiilor de condiţie (C.93) poate fi scris matriceal sub forma:

$$AV - W = O \ , \qquad \text{(C.95)}$$

folosind notaţiile

$$\underset{(r,n)}{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix}, \quad \underset{(n,1)}{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \underset{(r,1)}{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix}.$$

De asemenea, condiţia de minim (C.61) se poate scrie matriceal sub forma (C.67).

Deoarece corecţiile V ce urmează a fi determinate trebuie să satisfacă atât condiţia de mimim (C.67), cât şi sistemul de ecuaţii (C.95), va trebui rezolvată o problemă de minim condiţionat. Aceasta se poate realiza prin **metoda multiplicatorilor Lagrange.**

Funcţia Lagrange se poate scrie sub forma:

$$F(V_1, \ldots, V_n, K_1, \ldots, K_r) = V^T V - 2K^T(AV - W) \ ,$$

unde parametrii K_i sunt multiplicatori Lagrange, sau corelate Gauss.

Pentru a determina minimul acestei funcţii, vor trebui îndeplinite condiţiile:

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{\partial F}{\partial V} = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{\partial F}{\partial K} = 0 \ ,$$

adică

$$2V - 2A^T K = 0 \ ,$$

de unde rezultă:

$$V = A^T K \ . \tag{C.96}$$

Substituind vectorul V dat de această relaţie în (C.95), se obţine **sistemul normal al corelatelor:**

$$A A^T K = W \tag{C.97}$$

având matricea coeficienţilor simetrică şi pozitiv definită şi prin urmare inversabilă. Soluţia matriceală a acestui sistem va fi:

$$K = (A A^T)^{-1} W \ . \tag{C.98}$$

În fine, substituind vectorul corelatelor K dat de această relaţie în (C.96) se obţine:

$$V = A^T (A A^T)^{-1} W \ . \tag{C.99}$$

Vectorul V astfel determinat va conţine valorile cele mai probabile ale corecţiilor v_j $(j=1,...,n)$. Aceste corecţii se aplică apoi valorilor măsurate l_j conform relaţiei (C.92), rezultând valorile compensate ale mărimilor X_j.

În ceea ce priveşte estimarea preciziei, se poate calcula **eroarea medie pătratică a unei mărimi măsurate** cu formula:

$$\sigma_o = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{r}} \ . \tag{C.100}$$

Pe de altă parte, având în vedere relaţia (C.96), **matricea de varianţă-covarianţă a corecţiilor** V se poate exprima în funcţie de **matricea de varianţă-covarianţă a corelatelor** K sub forma:

$$\sigma_V = A^T \sigma_K A \ , \tag{C.101}$$

unde σ_K are expresia

$$\sigma_K = \sigma_o^2 \left(A A^T \right)^{-1} \tag{C.102}$$

similară cu (C.84), dar obţinută aici pe baza relaţiei (C.98).

Substituind (C.102) în (C.101), rezultă:

$$\sigma_V = \sigma_o^2 A^T \left(AA^T\right)^{-1} A \ , \qquad \text{(C.103)}$$

reprezentând formula prin care se poate determina matricea de varianţă-covarianţă a corecţiilor V.

c. Prelucrarea măsurătorilor ponderate

Fie p_i ponderile celor n mărimi măsurate şi P matricea ponderilor de forma (C.86), dar de dimensiuni (n,n). Condiţia de minim se poate exprima prin relaţia (C.60) sau matriceal prin relaţia (C.87).

Funcţia Lagrange va avea acum forma:

$$F = V^T P\, V - 2K^T(AV - W) \ ,$$

iar din condiţia de minim va rezulta:

$$V = P^{-1}A^T K \ . \qquad \text{(C.104)}$$

Sistemul normal al corelatelor va fi dat de relaţia:

$$(AP^{-1}A^T)K = W \qquad \text{(C.105)}$$

şi va avea soluţia

$$K = (AP^{-1}A^T)W \ . \qquad \text{(C.106)}$$

În fine, substituind vectorul corelatelor K în (C.104), se obţine vectorul corecţiilor:

$$V = P^{-1}A^T(AP^{-1}A^T)^{-1}W \qquad \text{(C.107)}$$

Aplicând apoi aceste corecţii valorilor măsurate, vor rezulta valorile compensate ale mărimilor X_j $(j=1,\ldots,n)$ conform relaţiilor de forma (C.92).

În ceea ce priveşte estimarea preciziei, se poate calcula **eroarea medie pătratică a unităţii de pondere** cu formula:

$$\sigma_o = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{r}} \ . \qquad \text{(C.108)}$$

Pe de altă parte, având în vedere relaţia (C.104), **matricea de varianţă-covarianţă a corecţiilor** V se poate exprima în funcţie de **matricea de varianţă-covarianţă a corelatelor** K sub forma:

Scanned with OKEN Scanner

$$\sigma_v = \left(P^{-1}A^T\right)\sigma_K\left(AP^{-1}\right) , \qquad \text{(C.109)}$$

unde σ_K are expresia

$$\sigma_K = \sigma_o^2\left(AP^{-1}A^T\right)^{-1} \qquad \text{(C.110)}$$

şi prin urmare,

$$\sigma_V = \sigma_o^2\left(P^{-1}A^T\right)\left(AP^{-1}A^T\right)^{-1}\left(AP^{-1}\right) . \qquad \text{(C.111)}$$

C.2.4. Compensarea măsurătorilor indirecte cu constrângeri

În practică apar situaţii în care mărimile necunoscute trebuie să satisfacă anumite condiţii geometrice sau fizice. De exemplu, în fotogrammetrie, punctele situate pe conturul unui lac vor trebui să aibă aceeaşi cotă (cunoscută sau necunoscută); punctele dispuse pe o porţiune rectilinie a unei căi ferate vor trebui să fie coliniare; două puncte ale modelului fotogrammetric pot fi constrânse printr-o distanţă cunoscută; punctele de preluare a imaginilor dintr-un vehicul orbital pot fi constrânse la traiectoria orbitei respective etc.

Fie n mărimi necunoscute X_j dependente funcţional de m valori măsurate direct M_i^o pentru care, conform principiului metodei măsurătorilor indirecte, se pot scrie m **ecuaţii de corecţii** de forma (C.64):

$$a_i dX_1 + b_i dX_2 + \ldots + h_i dX_n - l_i = v_i ,$$

unde

$$l_i = M_i^o - \left(a_i X_1^o + b_i X_2^o + \ldots + h_i X_n^o\right)$$

sau matriceal (C.66):

$$\underset{(m,n)}{A} \cdot \underset{(n,1)}{\Delta} - \underset{(m,1)}{L} = \underset{(m,1)}{V} ,$$

numărul de ecuaţii fiind mai mare decât numărul de necunoscute ($m>n$).

Pe de altă parte, cele n necunoscute X_j vor trebui să satisfacă s ecuaţii de condiţie de forma (C.91):

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{cases} a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n - a_o = 0 \\ b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots + b_nX_n - b_o = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_1X_1 + s_2X_2 + \ldots + s_nX_n - s_o = 0 \end{cases}$$

sau având în vedere că $X_j = X_j^o + dX_j$, $(j = 1, \ldots, n)$,

$$\begin{cases} a_1dX_1 + a_2dX_2 + \ldots + a_ndX_n - w_1 = 0 \\ b_1dX_1 + b_2dX_2 + \ldots + b_ndX_n - w_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_1dX_1 + s_2dX_2 + \ldots + s_ndX_n - w_s = 0 \end{cases}$$

unde

$$w_1 = a_o - \left(a_1X_1^o + a_2X_2^o + \ldots + a_nX_n^o\right) \text{ etc.}$$

Dacă se notează

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ \vdots \\ dX_n \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_s \end{pmatrix},$$

sistemul ecuaţiilor de condiţie se va scrie sub forma:

$$\underset{(s,n)}{C} \cdot \underset{(n,1)}{\Delta} - \underset{(s,1)}{W} = O \quad ,$$

numărul de ecuaţii fiind mai mic decât numărul de necunoscute ($s<n$).

Prin urmare, va trebui rezolvat următorul sistem de ecuaţii matriceale:

$$\begin{cases} A \cdot \Delta - L = V & \text{(C.112)} \\ C \cdot \Delta - W = O & \text{(C.113)} \end{cases}$$

Un mod eficient de a obţine soluţia acestui sistem constă în determinarea unor valori provizorii ale necunoscutelor Δ^o prin rezolvarea primei ecuaţii (C.112) fără a ţine seama de restricţiile (C.113), la care se vor adăuga apoi corecţiile δ provenind din condiţiile impuse de cea de a doua ecuaţie. Prin urmare, soluţia Δ va fi dată de relaţia:

$$\Delta = \Delta^o + \delta \quad . \qquad \text{(C.114)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Introducând (C.114) în (C.112) se obţine

$$A\Delta^0 + A\delta - L = V$$

şi notând

$$A\Delta^0 - L = V' \qquad \text{(C.115)}$$

şi

$$A\delta = V'' \qquad \text{(C.116)}$$

unde

$$V' + V'' = V \ ,$$

se pot deduce valorile provizorii ale necunoscutelor Δ^0 în urma normalizării ecuaţiilor (C.115):

$$(A^T P A)\Delta^0 - A^T P L = O \ .$$

Soluţia acestui sistem de ecuaţii normale se poate scrie, având în vedere notaţiile (C.89), sub forma:

$$\Delta^0 = N^{-1} L_N \ . \qquad \text{(C.117)}$$

În mod similar, considerând vectorul V'' ca termen liber, se pot obţine în urma normalizării sistemului (C.116) corecţiile:

$$\delta = N^{-1}(A^T P V'') \ . \qquad \text{(C.118)}$$

Pe de altă parte, substituind (C.114) în (C.113) rezultă:

$$C\Delta^0 + C\delta - W = O$$

şi notând

$$C\Delta^0 - W = -W' \ ,$$

se obţine

$$C\delta - W' = O \ . \qquad \text{(C.119)}$$

Înlocuind în această relaţie vectorul δ prin expresia (C.118) va rezulta:

$$(C N^{-1} A^T P) V'' - W' = O \ , \qquad \text{(C.120)}$$

reprezentând un sistem de ecuaţii de forma (C.95), caracteristic măsurătorilor condiţionate.

Sistemul normal al corelatelor va fi în acest caz

$$(C N^{-1} A^T P) P^{-1} (C N^{-1} A^T P)^T K = W'$$

Scanned with OKEN Scanner

sau efectuând calculele şi ţinând seama de notaţiile (C.89):

$$(C N^{-1} C^T) K = W' \ ,$$

de unde se poate obţine

$$K = (C N^{-1} C^T)^{-1} W' \ . \qquad \text{(C.121)}$$

Având în vedere relaţia (C.104) şi forma matricei coeficienţilor sistemului (C.120) se poate scrie

$$V'' = P^{-1}(C N^{-1} A^T P)^T K = (A N^{-1} C^T) K \ . \qquad \text{(C.122)}$$

Substituind V'' în (C.118), se obţine:

$$\delta = N^{-1} A^T P A N^{-1} C^T K = N^{-1} C^T K \ , \qquad \text{(C.123)}$$

sau, având în vedere expresia (C.121) a vectorului corelatelor K,

$$\delta = N^{-1} C^T (C N^{-1} C^T)^{-1} W' \ . \qquad \text{(C.124)}$$

În ceea ce priveşte **matricea de varianţă-covarianţă a corecţiilor** necunoscutelor Δ, aceasta se va obţine cu relaţia:

$$\sigma_\Delta = \sigma_{\Delta^o} (I - \sigma_\delta) \ , \qquad \text{(C.125)}$$

unde σ_{Δ^o} este data de formula (C.84):

$$\sigma_{\Delta^o} = \sigma_o^2 N^{-1} \ , \qquad \text{(C.126)}$$

iar

$$\sigma_\delta = C^T \left(C N^{-1} C^T \right)^{-1} C N^{-1} \ . \qquad \text{(C.127)}$$

Pe de altă parte, **eroarea medie pătratică a unităţii de pondere** va fi dată de relaţia:

$$\sigma_o = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{m - (n - s)}} \qquad \text{(C.128)}$$

având în vedere că problema se poate reduce la o compensare prin metoda măsurătorilor indirecte, cu m ecuaţii de corecţii şi n - s necunoscute.

Erorile individuale ale necunoscutelor se pot calcula cu formula (C.83):

$$\sigma_j = \sigma_o \sqrt{q_{jj}} \quad (j = 1, \ldots, n) \ , \qquad \text{(C.129)}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde coeficienţii de pondere q_{jj} sunt daţi de elementele de pe diagonala principală a matricei Q ce rezultă din (C.125), (C.126) şi (C.127):

$$Q = N^{-1}(I - C^T(C N^{-1} C^T)^{-1} C N^{-1} \quad . \qquad \text{(C.130)}$$

Acest algoritm prin care se determină separat corecţiile δ şi matricea corespunzătoare de varianţă-covarianţă prezintă avantajul că permite analizarea influenţei constrângerilor asupra soluţiei.

Se poate observa de asemenea că s-a tratat cazul măsurătorilor ponderate în cazul măsurătorilor de aceeaşi precizie, relaţiile particularizându-se pentru ponderi unitare.

C.2.5. Compensarea măsurătorilor condiţionate cu parametri necunoscuţi

Fie m măsurători M_i^o cu ponderile p_i şi cărora le corespund corecţiile v_i .De asemenea, se consideră n parametri X_j pentru care se cunosc aproximaţiile X_j^o, urmând să se determine corecţiile dX_j . În plus, toate acestea se presupun funcţional dependente prin r relaţii de condiţie de forma:

$$F_k\left(M_1^o + v_1, \ldots, M_m^o + v_m, X_1^o + dX_1, \ldots, X_n^o + dX_n\right) = 0 \quad (k = 1, \ldots, r) \quad . \quad \text{(C.131)}$$

Dacă aceste funcţii nu sunt liniare, ele se vor liniariza prin dezvoltare în serie Taylor (neglijând termenii de ordin mai mare ca I):

$$F_k = F_k\left(M_1^o, \ldots, M_m^o, X_1^o, \ldots, X_n^o\right) + \left(\frac{\partial F_k}{\partial M_1}\right)^o v_1 + \ldots + \left(\frac{\partial F_k}{\partial M_m}\right)^o v_m +$$

$$+ \left(\frac{\partial F_k}{\partial X_1}\right)^o dX_1 + \ldots + \left(\frac{\partial F_k}{\partial X_n}\right)^o dX_n = 0$$

Dacă se notează

$$a_{1i} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial M_i}\right)^o, \; a_{2i} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial M_i}\right)^o, \; \ldots, \; a_{ri} = \left(\frac{\partial F_r}{\partial M_i}\right)^o \quad (i = 1, \ldots, m)$$

$$b_{1j} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial X_j}\right)^o, \; b_{2j} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial X_j}\right)^o, \; \ldots, \; b_{rj} = \left(\frac{\partial F_r}{\partial X_j}\right)^o \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$w_k = -F_k\left(M_1^o, \ldots, M_m^o, X_1^o, \ldots, X_n^o\right) \quad (k = 1, \ldots, r)$$

Scanned with OKEN Scanner

se obţine următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} a_{11}v_1+a_{12}v_2+...+a_{1m}v_m+b_{11}dX_1+b_{12}dX_2+...+b_{1n}dX_n-w_1=0 \\ a_{21}v_1+a_{22}v_2+...+a_{2m}v_m+b_{21}dX_1+b_{22}dX_2+...+b_{2n}dX_n-w_2=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}v_1+a_{r2}v_2+...+a_{rm}v_m+b_{r1}dX_1+b_{r2}dX_2+...+b_{rn}dX_n-w_r=0 \end{cases} \qquad \text{(C.132)}$$

Acest sistem conţine r ecuaţii cu $m+n$ necunoscute, unde $r < m+n$ şi $n < r$, numărul gradelor de libertate fiind $r-n$.

Trecând la notaţii matriceale,

$$\underset{(r,m)}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rm} \end{pmatrix}, \quad \underset{(m,1)}{V}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}, \quad \underset{(r,n)}{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rn} \end{pmatrix},$$

$$\underset{(n,1)}{\Delta}=\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ \vdots \\ dX_n \end{pmatrix}, \quad \underset{(r,1)}{W}=\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix},$$

sistemul de ecuaţii (C.132) se va putea scrie sub forma:

$$AV+B\Delta-W=O \ . \qquad \text{(C.133)}$$

Valorile cele mai probabile ale corecţiilor se vor determina prin aplicarea principiului pătratelor minime exprimat de condiţia (C.60). Va trebui rezolvată deci o problemă de minim condiţionat.

Funcţia Lagrange va fi în acest caz:

$$V^TP\,V-2K^T(A\,V+B\,\Delta-W)=min.$$

Anulând derivatele parţiale în raport cu V, Δ şi K se obţin următoarele 3 relaţii:

$$V=P^{-1}A^TK \ , \qquad \text{(C.134)}$$

$$B^TK=O \ , \qquad \text{(C.135)}$$

$$A\,V + B\,\Delta - W = O \quad , \tag{C.136}$$

reprezentând un sistem de 3 ecuaţii matriceale cu 3 necunoscute .

Substituind (C.134) în (C.136) rezultă:

$$(A\,P^{-1}A^{T})\,K + B\,\Delta - W = O \quad .$$

de unde se poate deduce

$$K = (A\,P^{-1}A^{T})^{-1}(W - B\,\Delta) \quad . \tag{C.137}$$

Introducând acum corelatele K în (C.135) se poate obţine vectorul corecţiilor necunoscutelor:

$$\Delta = (B^{T}(A\,P^{-1}A^{T})^{-1}B)^{-1}(B^{T}(A\,P^{-1}A^{T})^{-1}W) \quad . \tag{C.138}$$

Pentru a determina corecţiile măsurătorilor, se calculează întâi corelatele K folosind relaţia (C.137) şi se înlocuiesc apoi în (C.134).

În ceea ce priveşte **matricea de varianţă-covarianţă a corecţiilor** Δ, aceasta va avea următoarea expresie:

$$\sigma_{\Delta} = \sigma_o^2\left(B^{T}\left(AP^{-1}A^{T}\right)^{-1}B\right)^{-1} , \tag{C.139}$$

unde

$$\sigma_o = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{r-n}} \quad . \tag{C.140}$$

Erorile individuale ale necunoscutelor se pot calcula cu formula (C.83):

$$\sigma_j = \sigma_o\sqrt{q_{jj}} \quad (j=1,\ldots,n) \quad , \tag{C.141}$$

unde q_{jj} sunt elementele de pe diagonala principală a matricei

$$Q = \left(B^{T}\left(AP^{-1}A^{T}\right)^{-1}B\right)^{-1} \quad . \tag{C.142}$$

Se observă că şi aici (ca şi în paragraful anterior) s-a considerat cazul măsurătorilor ponderate, măsurătorile de aceeaşi precizie reprezentând un caz particular (când ponderile se consideră unitare).

Pe de altă parte, se poate face observaţia că măsurătorile condiţionate cu necunoscute pot fi apreciate ca un caz general, din care pentru $B = O$ se obţine cazul măsurătorilor condiţionate, iar pentru $A = -I$ rezultă cazul măsurătorilor indirecte.

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, acest caz poate fi extins prin adăugarea unor constrângeri de forma (C.113):

$$\begin{cases} AV + B\Delta - W = O \\ C\Delta - W_s = O \end{cases} \tag{C.143}$$

Rezolvarea acestui sistem de ecuaţii matriceale se poate face ca şi la paragraful C.2.4, considerând ca valori provizorii Δ^o cele obţinute din prima ecuaţie (fără a ţine seama de constrângeri) şi calculând apoi corecţiile δ provenind din condiţiile impuse prin cea de a doua ecuaţie matriceală.

Prin urmare, soluţia sistemului (C.143) va fi dată de relaţia (C.114):

$$\Delta = \Delta^o + \delta \ ,$$

unde Δ^o (conform observaţiei anterioare) se exprimă prin formula (C.138), iar δ prin (C.124), cu observaţia că în acest caz

$$\begin{aligned} N &= B^T\left(AP^{-1}A^T\right)^{-1}B \ , \\ W' &= W_s - C\Delta^o \ . \end{aligned} \tag{C.144}$$

În ceea ce priveşte matricea de varianţă-covarianţă σ_Δ , aceasta se poate obţine cu relaţia (C.125), unde σ_{Δ^o} se exprimă prin (C.126), matricea N fiind dată însă de (C.144), iar σ_δ prin (C.127) cu aceeaşi observaţie privind matricea N.

C.2.6. Modalităţi de îmbunătăţire a soluţiei după compensare

a. Eliminarea datelor necorespunzătoare

Considerând cazul general de compensare prezentat în paragraful anterior, notând

$$L_N = B^T\left(AP^{-1}A^T\right)^{-1}W \tag{C.145}$$

şi ţinând seama de (C.144), soluţia Δ se poate scrie sub forma (C.70):

$$\Delta = N^{-1}L_N \ .$$

Presupunând că după obţinerea acestei soluţii se constată că e măsurători au erori mari, ele vor trebui eliminate, repetând apoi compensarea. Totuşi, reluarea întregului proces de compensare ar fi o soluţie nepractică, mai ales când acesta implică rezolvarea unor sisteme mari de ecuaţii. În continuare se va prezenta însă

Scanned with OKEN Scanner

un procedeu eficient de eliminare a măsurătorilor eronate, calculând efectul acestora asupra matricelor N^{-1} și L_N, care vor fi corectate corespunzător:

$$N_r^{-1} = N^{-1} - N_e^{-1} \ , \tag{C.146}$$

$$L_{N_r} = L_N - L_{N_e} \ , \tag{C.147}$$

unde N_e^{-1} și L_{N_e} sunt funcții de măsurătorile eliminate, iar N_r^{-1} și L_{N_r} sunt matricele rezultate după eliminare.

Pe de altă parte, sistemul inițial de ecuații (C.133) se poate împărți în două:

$$\underset{(s,t)}{A_r} \cdot \underset{(t,1)}{V_r} + \underset{(s,n)}{B_r} \cdot \underset{(n,1)}{\Delta} - \underset{(s,1)}{W_r} = O \ , \tag{C.148}$$

$$\underset{(g,e)}{A_e} \cdot \underset{(e,1)}{V_e} + \underset{(g,n)}{B_e} \cdot \underset{(n,1)}{\Delta} - \underset{(g,1)}{W_e} = O \ , \tag{C.149}$$

astfel încât

$$s + g = r \ ,$$

$$t + e = m \ ,$$

relația (C.149) reprezentând grupul de ecuații ce urmează să fie eliminate. De aici se pot deduce matricele N_e^{-1} și L_{N_e}:

$$N_e^{-1} = N^{-1}B_e^{\mathrm{T}}\left(-A_eP_e^{-1}A_e^{\mathrm{T}} + B_eN^{-1}B_e^{\mathrm{T}}\right)^{-1}B_eN^{-1} \ , \tag{C.150}$$

$$L_{N_e} = B_e^{\mathrm{T}}\left(A_eP_e^{-1}A_e^{\mathrm{T}}\right)^{-1}W_e \ . \tag{C.151}$$

Soluția corectată Δ' se va putea obține cu relația:

$$\Delta' = N_r^{-1}L_{N_r} \ , \tag{C.152}$$

unde N_r^{-1} și L_{N_r} sunt date de (C.146) și respectiv (C.147).

b. Adăugarea unor ecuații suplimentare

Fie soluția (C.70) corespunzătoare cazului general de compensare (avut în vedere și în paragraful anterior):

$$\Delta = N^{-1}L_N \ ,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde N şi L_N sunt date de relaţiile (C.144) şi respectiv (C.145).

Presupunând că după obţinerea acestei soluţii se doreşte adăugarea unui nou grup de ecuaţii:

$$A_a V_a + B_a \Delta - W_a = O \ , \qquad \text{(C.153)}$$

se va putea (ca şi în cazul anterior) să se corecteze soluţia Δ fără a reface compensarea.

Notând cu Δ' soluţia corectată, aceasta se va putea determina cu formula:

$$\Delta' = N_s^{-1} L_{N_s} \ , \qquad \text{(C.154)}$$

unde

$$N_s^{-1} = N^{-1} - N^{-1} B_a^{\mathrm{T}} \left(A_a P_a^{-1} A_a^{\mathrm{T}} + B_a N^{-1} B_a^{\mathrm{T}} \right)^{-1} B_a N^{-1} \ , \qquad \text{(C.155)}$$

$$L_{N_s} = L_N + B_a^{\mathrm{T}} \left(A_a P_a^{-1} A_a^{\mathrm{T}} \right)^{-1} W_a \ . \qquad \text{(C.156)}$$

C.2.7. Reprezentarea preciziei rezultatelor compensării prin elipsa şi elipsoidul erorilor

a. Elipsa erorilor

În general, în domeniul măsurătorilor (deci şi în cazul determinărilor fotogrammetrice), pe lângă valorile probabile ale mărimilor măsurate sau deduse indirect, interesează şi preciziile acestora.

Considerând mai întâi cazul bidimensional, fie σ_p **matricea de varianţă-covarianţă corespunzătoare coordonatelor calculate** X, Y ale unui punct P:

$$\sigma_p = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} \qquad \text{(C.157)}$$

Deoarece erorile medii pătratice σ_X şi σ_Y calculate în urma compensării variază valoric la rotaţii ale sistemului de coordonate, este preferabil ca aprecierea preciziei să se facă pe baza elipsei erorilor care este independentă de sistemul de axe ales. Cu ajutorul acestei elipse se vor putea determina erorile privind poziţiile punctelor pentru orice direcţie şi deci şi pentru direcţiile axelor de coordonate, precum şi pentru direcţiile în care erorile sunt maxime sau minime (X_m, respectiv Y_m).

Scanned with OKEN Scanner

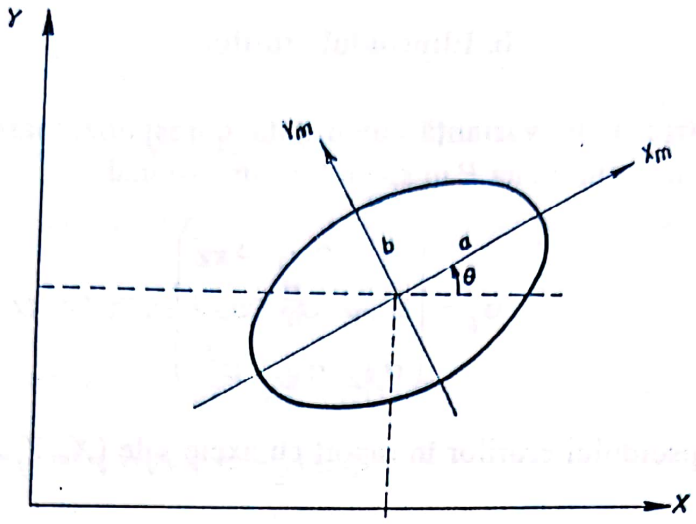

Figura C.5. Elipsa erorilor.

Ecuația elipsei erorilor (fig. C.5) în sistemul (X_m, Y_m) se poate exprima prin relația:

$$\frac{X_m^2}{\sigma_{X_m}^2}+\frac{Y_m^2}{\sigma_{Y_m}^2}=C \quad , \tag{C.158}$$

unde

$$\sigma_{X_m}^2=\frac{1}{2}\left(\left(\sigma_X^2+\sigma_Y^2\right)+\sqrt{\left(\sigma_X^2-\sigma_Y^2\right)^2+4\sigma_{XY}^2}\right), \tag{C.159}$$

$$\sigma_{Y_m}^2=\frac{1}{2}\left(\left(\sigma_X^2+\sigma_Y^2\right)-\sqrt{\left(\sigma_X^2-\sigma_Y^2\right)^2+4\sigma_{XY}^2}\right). \tag{C.160}$$

Semiaxele acestei elipse sunt

$$a=\sigma_{X_m}\sqrt{C} \quad , \quad b=\sigma_{Y_m}\sqrt{C}\,, \tag{C.161}$$

iar unghiul pe care-l formează axa principală a elipsei X_m cu axa X este dat de formula:

$$tg\,\theta=\frac{2\sigma_{XY}}{\sigma_X^2-\sigma_Y^2} \quad . \tag{C.162}$$

Dacă $C = 1$ se obține elipsa standard, dar probabilitatea ca poziția reală a punctului P să se afle în interiorul acestei elipse este de numai 38% . Această probabilitate va crește la 90% pentru $C = 4{,}6$ și la 99% pentru $C = 9{,}2$.

b. Elipsoidul erorilor

Fie σ_p **matricea de varianţă-covarianţă corespunzătoare coordonatelor calculate** X,Y,Z ale unui punct P în spaţiul tridimensional:

$$\sigma_p = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{XZ} & \sigma_{YZ} & \sigma_Z^2 \end{pmatrix} \qquad \text{(C.163)}$$

Ecuaţia elipsoidului erorilor în raport cu axele sale (X_e,Y_e,Z_e) se poate scrie sub forma:

$$\frac{X_e^2}{\sigma_{X_e}^2}+\frac{Y_e^2}{\sigma_{Y_e}^2}+\frac{Z_e^2}{\sigma_{Z_e}^2}=C' \qquad \text{(C.164)}$$

Pentru a determina $\sigma_{X_e}^2,\sigma_{Y_e}^2,\sigma_{Z_e}^2$ şi cu ajutorul acestora semiaxele elipsoidului, precum şi pentru a defini rotaţia sistemului elipsoidului în raport cu sistemul de coordonate X,Y,Z exprimată prin matricea R în funcţie de unghiurile ω,φ şi κ (după cum se arată în paragraful A.2.2), se porneşte de la relaţia

$$\sigma_e = R\sigma_p R^{\mathrm{T}} \ ,$$

adică

$$\begin{pmatrix} \sigma_{X_e}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{Y_e}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{Z_e}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{XZ} & \sigma_{YZ} & \sigma_Z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & 22 & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{(C.165)}$$

De aici, având în vedere simetria matricei σ_p şi în consecinţă a matricei rezultate din produsul $R\,\sigma_p R^{\mathrm{T}}$, se pot obţine 6 ecuaţii independente:

$$\begin{aligned} &r_{11}\left(r_{11}\sigma_X^2 + r_{12}\sigma_{XY} + r_{13}\sigma_{XZ}\right) + r_{12}\left(r_{11}\sigma_{XY} + r_{12}\sigma_Y^2 + r_{13}\sigma_{YZ}\right) + \\ &+r_{13}\left(r_{11}\sigma_{XZ} + r_{12}\sigma_{YZ} + r_{13}\sigma_Z^2\right) = \sigma_{X_e}^2 \end{aligned} \qquad \text{(C.166)}$$

$$\begin{aligned} &r_{21}\left(r_{21}\sigma_X^2 + r_{22}\sigma_{XY} + r_{23}\sigma_{XZ}\right) + r_{22}\left(r_{21}\sigma_{XY} + r_{22}\sigma_Y^2 + r_{23}\sigma_{YZ}\right) + \\ &+r_{23}\left(r_{21}\sigma_{XZ} + r_{22}\sigma_{YZ} + r_{23}\sigma_Z^2\right) = \sigma_{Y_e}^2 \end{aligned} \qquad \text{(C.167)}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$r_{31}\left(r_{31}\sigma_X^2 + r_{32}\sigma_{XY} + r_{33}\sigma_{XZ}\right) + r_{32}\left(r_{31}\sigma_{XY} + r_{32}\sigma_Y^2 + r_{33}\sigma_{YZ}\right) + \\ + r_{33}\left(r_{31}\sigma_{XZ} + r_{32}\sigma_{YZ} + r_{33}\sigma_Z^2\right) = \sigma_{Z_e}^2 \qquad \text{(C.168)}$$

$$r_{11}\left(r_{21}\sigma_X^2 + r_{22}\sigma_{XY} + r_{23}\sigma_{XZ}\right) + r_{12}\left(r_{21}\sigma_{XY} + r_{22}\sigma_Y^2 + r_{23}\sigma_{YZ}\right) + \\ + r_{13}\left(r_{21}\sigma_{XZ} + r_{22}\sigma_{YZ} + r_{23}\sigma_Z^2\right) = 0 \qquad \text{(C.169)}$$

$$r_{11}\left(r_{31}\sigma_X^2 + r_{32}\sigma_{XY} + r_{33}\sigma_{XZ}\right) + r_{12}\left(r_{31}\sigma_{XY} + r_{32}\sigma_Y^2 + r_{33}\sigma_{YZ}\right) + \\ + r_{13}\left(r_{31}\sigma_{XZ} + r_{32}\sigma_{YZ} + r_{33}\sigma_Z^2\right) = 0 \qquad \text{(C.170)}$$

$$r_{21}\left(r_{31}\sigma_X^2 + r_{32}\sigma_{XY} + r_{33}\sigma_{XZ}\right) + r_{22}\left(r_{31}\sigma_{XY} + r_{32}\sigma_Y^2 + r_{33}\sigma_{YZ}\right) + \\ + r_{23}\left(r_{31}\sigma_{XZ} + r_{32}\sigma_{YZ} + r_{33}\sigma_Z^2\right) = 0 \qquad \text{(C.171)}$$

Aceste ecuaţii conţin 6 necunoscute: $\sigma_{X_e}, \sigma_{Y_e}, \sigma_{Z_e}, \omega, \varphi$ şi κ. Cele 3 rotaţii (ω,φ,κ) incluse în cosinusurile directoare r_{ij} se pot obţine prin rezolvarea sistemului format de ecuaţiile (C.169), (C.170) şi (C.171). Aceste ecuaţii vor trebui liniarizate în raport cu parametrii necunoscuţi, care vor fi determinaţi printr-un proces iterativ. Cu valorile astfel obţinute se va forma matricea de rotaţie R, adică se vor calcula cosinusurile directoare r_{ij}, care se vor înlocui în ecuaţiile (C.166), (C.167) şi (C.168), de unde vor rezulta $\sigma_{X_e}, \sigma_{Y_e}$ şi σ_{Z_e}.

Dacă se consideră $C = 1$, probabilitatea ca poziţia reală a punctului P să se afle în interiorul elipsoidului este de numai 20%. Pentru $C = 6{,}25$ această probabilitate va creşte la 90%, iar pentru $C = 11{,}34$ probabilitatea va fi de 99%.

Deşi majoritatea problemelor fotogrammetrice implică determinarea poziţiilor punctelor în spaţiul tridimensional, nu va fi nici practic (având în vedere volumul de calcule cerut) şi nici necesar să se analizeze precizia fiecărui punct prin elipsoidul corespunzător al erorilor. Această analiză se va putea face doar pentru câteva puncte selectate cu atenţie. De asemenea, în numeroase aplicaţii va fi suficient de satisfăcătoare aprecierea preciziei unui punct pe baza elementelor situate pe diagonala principală a matricei de varianţă-covarianţă $\sigma_p\left(\sigma_X^2, \sigma_Y^2, \sigma_Z^2\right)$ cu ajutorul cărora se poate obţine "eroarea medie pătratică poziţională ":

$$\sigma_{X,Y,Z} = \pm\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2}\ . \qquad \text{(C.172)}$$

Această relaţie se poate particulariza şi pentru cazul bidimensional prezentat în paragraful anterior.

BIBLIOGRAFIE

1.ACKERMANN, F., *Numerische Photogrammetrie*, Edit. H.Wichmann, Karlsruhe, 1973.

2.AMERICAN SOCIETY OF PHOTOGRAMMETRY, *Manual of Photogrammetry*, third edition, 1966; fourth edition, 1980.

3.ANDREI, N., RĂSTURNOIU, C., *Matrice rare şi aplicaţiile lor*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1983.

4.BACHMANN, W.K., DJAZMATI, S., *Etudes sur l'orientation relative analytique de vues aériennes verticales*, Lausanne, 1975.

5.BACHMANN, W.K., DJAZMATI, S., *Etude statistique de l'orientation absolue numerique de l'image plastique*, Lausanne, 1975.

6.BELLMAN, R., *Introducere în analiza matriceală*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1969.

7.BLANKENBERG, L.E., *GPS - supported aerial triangulation - state of art*, Photogrammetric Journal of Finland, vol. XIII, nr. 1, 1992.

8.BUCUR, C.M., POPEEA, C.A., SIMION, GH.GH., *Calcul numeric*, Edit. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

9.CORCODEL, GH., *Tehnologie on-line pentru aerotriangulaţie analitică*, Analele Institutului de Geodezie, Fotogrammetrie, Cartografie şi Organizarea Teritoriului, vol IX, Bucureşti, 1988.

10.FINSTERWALDER, R., HOFMANN, W., *Photogrammetrie*, Edit. W. de Gruyter, Berlin, 1968.

Scanned with OKEN Scanner

11.FOTESCU, N., *Teoria erorilor de măsurare şi metoda celor mai mici pătrate*, I.C.B., Bucureşti, 1978.

12.GHOSH, K.S., *Analytical Photogrammetry*, Edit. Pergamon Press, Oxford, 1979.

13.GHOSH, K.S., *Phototriangulation*, Edit. Lexington Books, Lexington, Massachusetts, 1975.

14.HALLERT, B., *Photogrammetry*, Mc Graw - Hill Book Company, Londra, 1960.

15.IACOB, C. şi col., *Matematici clasice şi moderne*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1978.

16.JORDAN, EGGERT, KNEISSL, *Handbuch der Vermessungskunde*, Band III, Edit. Metzlersche, Stuttgart, 1972.

17.KONECNY, G., LEHMANN, G., *Photogrammetrie*, Edit. W. de Gruyter, Berlin, 1984.

18.KRAUS, K., *Photogrammetry*, vol I - *Fundamentals and Standard Processes*, Edit. Ferd Dümmler, fourth edition, Bonn, 1993.

19.KRAUS, K., *Photogrammetrie*, vol II - *Theorie und Praxis der Auswertesysteme*, Edit. Ferd Dümmler, Bonn, 1984.

20.LOBANOV, A.N., *Aerofototopografia*, Edit. Nedra, Moscova, 1971.

21.MARTON, G., ZEGHERU, N., *Fotogrammetrie*, Edit. Ceres, Bucureşti, 1972.

22.MELCU, I., *Geometrie proiectivă*, Edit. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1963.

23.MIKHAIL, E., *Observations and Least Squares*, Edit. IEP-A Dun-Donnelley, New York, 1976.

24.OPRESCU, N., *Fotogrametrie*, I.C.B., Bucureşti, 1971.

25.OPRESCU, N. şi col. *Manualul inginerului geodez*, vol I şi vol III, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1973.

Scanned with OKEN Scanner

26.OPRESCU, N., CALISTRU, V., TURDEANU, L., *Fotogrametrie*, I.C.B., Bucureşti, 1982.

27. ROŞCULEŢ, D., *Contribuţii la îndesirea reţelei de sprijin necesare exploatării fotogrammetrice*, Teză de doctorat, I.C.B., Bucureşti, 1980.

28.RÜGER, W., PIETSCHNER, J., REGENSBURGER, K., *Photogrammetrie*, Edit. VEB für Bauwesen, Berlin, 1978.

29.SCHWIDEFSKY, K., *Grundriss der Photogrammetrie*, Edit. B.G.Teubner, Stuttgart, 1963.

30.SCHWIDEFSKY, K., ACKERMANN, F., *Photogrammetrie*, Edit. B.G.Teubner, Stuttgart, 1976.

31.TURDEANU, L., *Aplicaţii ale fotogrammetriei analitice, folosind calculatoarele electronice*, Teză de doctorat, I.C.B., Bucureşti, 1978.

32.TURDEANU, L., *Tehnica calculului şi programare*, I.C.B., Bucureşti, 1984.

33.VRĂNCEANU, GH., *Geometrie analitică, proiectivă şi diferenţială*, Edit. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974.

34.WOLF, R.P., *Elements of Photogrammetry*, Edit. Mc Graw-Hill Book Company, Londra, 1982.

PERIODICE CONSULTATE

-Bildmessung, Luftbildwesen und Fernerkundung, Zeitschrift für Photogrammetrie und Fernerkundung, R.F.G.
-Buletin de fotogrammetrie si teledetecţie, România:
-Bulletin de la Société Française de Photogrammetrie, Franţa:
-Photogrammetria, Photogrammetry and Remote Sensing, Olanda.
-Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, S.U.A.
-Proceedings of the International Society of Photogrammetry and Remote Sensing, U.S.A.
-The Photogrammetric Record, Anglia.

Scanned with OKEN Scanner

Lucian L. Turdeanu, FOTOGRAMMETRIE ANALITICĂ (Analytical Photogrammetry), Bucureşti, Editura Academiei Române, 1997, 356 p.

Scanned with OKEN Scanner

ABSTRACT

In this book, the main problems of analytical photogrammetry are developed, considering that the reader is accustomed to the basic notions of photogrammetry. In order to underline the photogrammetric aspect, the mathematical developments on which theoretical demonstration is founded are presented in three annex-chapters. These refer to geometrical principles used in analytical photogrammetry, matrix algebra which is the basis of theoretical and practical developments and the least squares method, through which data processing is performed. Also, the symbols used are defined, relying on the leading world-wide workings in this field.

We must emphasize as well the fact that the theoretical developments are attended by practical recommendations regarding the solution of different problems, lending the book a well-marked applicable characteristic too. As a matter of fact, the author has a valuable professorate and research experience in this field. The most extensive and complex chapter of the book (Analytical aerotriangulation) is the most suggestive from this point of view and it reflects best the author's contribution concerning the structure and the contents of the problems presented. Here, the principal methods of aerotriangulation are theoretically developed and the manner of their practical application is suggested. All the preceding chapters converge to this, although they may be considered as solving independent or partially correlated problems. Finally, the last chapter refers to instruments for analytical evaluation being based on their distinct classification.

Taking into account all these considerations, one may remark the fact that the work addresses especially to research workers and specialists in photogrammetry-remote sensing, as well as to those who intend to study this discipline steadily, having however the basic knowledge above mentioned (relating to photogrammetry and mathematics). On the other hand, taking into consideration the continuous development of the application domains of photogrammetry-remote sensing both in topographical and in various non-topographical fields, the book must be of real help for a wide range of specialists.

CONTENTS

1.INTRODUCTION.....13

1.1. General considerations.....13
1.1.1. Definitions.....13
1.1.2. Brief history.....13
1.2. Basic principles.....13
1.2.1. General principles.....15
1.2.2. General problem and basic problems of analytical photogrammetry.....15
1.2.3. Orientation of photographs.....16
1.3. Definition of symbols used.....19
.....22

2. INNER ORIENTATION.....26

2.1. Photographic coordinate system.....26
2.2. Reduction of measured coordinates to principal point.....26
2.3. Correction of instrumental errors.....28
2.4. Correction for deformation of emulsion carrier.....30
2.5. Correction for lens distortion.....34
2.6. Correction for the atmospheric refraction.....39
2.7. Correction for the earth curvature.....42
2.8. Correction for the relief influence.....43
.....45

3. EXTERIOR ORIENTATION OF SINGLE PHOTOGRAPH.....47

3.1. Collinearity condition.....47
3.2. Particular forms of collinearity equations.....47
3.3. Differential form of collinearity equations.....51
3.4. Independent evaluation of aerial photographs.....53
.....58

4. EXTERIOR ORIENTATION OF A STEREOPAIR.....69

4.1. Relative orientation.....69
4.1.1. Coplanarity condition.....69
4.1.2. Linearized form of coplanarity equation.....71
4.1.3. Relative orientation using elements of an only photograph.....73
4.1.4. Relative orientation using rotational elements.....75
4.2. Computation of model coordinates.....83
.....87

Scanned with OKEN Scanner

4.2.1. Computation of model coordinates for a pair of photographs.....87
4.2.2. Computation of double-model coordinates.....91
4.2.3. Model deformations.....93
4.3. Absolute orientation.....97
4.3.1. Basic mathematical relations.....97
4.3.2. Determination of approximate values of the orientation elements.....102
4.3.3. Adjustment of absolute orientation.....105
4.3.4. Computation of ground coordinates of the terrain details.....108

5. EXTERIOR ORIENTATION OF TERRESTRIAL PHOTOGRAPHS.....111

5.1. General considerations.....111
5.2. Basic relations.....113
5.3. Accuracy of obtaining the ground coordinates.....118
5.4. Rigorous treatment.....120

6. ANALYTICAL AEROTRIANGULATION.....126

6.1. Introduction. Definitions. Classifications.....126
6.2. Strip aerotriangulation.....128
6.2.1. Bridging of analytical models by common photograph.....129
6.2.2. Bridging of independent analytical models.....133
6.2.3. Bridging of independent analogical models.....136
6.2.4. Strip adjustment.....138
6.3. Block adjustment.....142
6.3.1. Block adjustment of strips.....142
6.3.2. Block adjustment by independent models.....145
6.3.3. Bundle adjustment.....161
6.4. Special cases of aerotriangulation.....178
6.4.1. Simultaneous adjustment of photogrammetric and geodetic observations.....178
6.4.2. GPS - supported aerotriangulation.....187
6.4.3. Block adjustment of photograph with single overlap for flat terrains.....194
6.4.4. Aerotriangulation by inclusion method.....198
6.5. Accuracy of analytical triangulation.....201

7. INSTRUMENTS FOR ANALYTICAL EVALUATION.....206

7.1. Point transfer and marking instruments.....207
7.2. Instruments for photogrammetric measurement.....209
7.2.1. Monocomparators.....209
7.2.2. Stereocomparators.....211
7.2.3. Coordinate measurement by analogue instruments.....216
7.3. On-line technology for analytical evaluation.....219
7.4. Analytical plotters.....220

APPENDIX A. ELEMENTS OF ANALYTIC AND PROJECTIVE GEOMETRY.....226

A.1. Coordinate systems.....226
A.2. Transformation of coordinates.....227
A.2.1. Two-dimensional transformations.....227
A.2.2. Three-dimensional transformations.....232

Scanned with OKEN Scanner

A.3. Basic properties, relations and theorems of projective geometry used in photogrammetry....247
A.3.1. Projectivities between forms of type I....248
A.3.2. Projectivities between forms of type II....257
A.3.3. Projectivities between forms of type III....260
A.3.4. Transformation by inversion....261

APPENDIX B. ELEMENTS OF LINEAR ALGEBRA AND MATRIX ANALYSIS....264

B.1. Matrices....264
B.1.1. Definitions, particular cases and general properties....264
B.1.2. Matrix operations....266
B.1.3. Inverse matrix....269
B.1.4. Rank of a matrix. Elementary operations....271
B.1.5. Matrix differentiation....271
B.2. Determinants....273
B.2.1. Definitions....273
B.2.2. Determinants evaluation....274
B.2.3. Properties of determinants....275
B.2.4. Determinant differentiation....275
B.3. Systems of linear equations....277
B.3.1. General considerations....277
B.3.2. Ill-conditioned systems....279
B.3.3. Methods of solving linear equations....280

APPENDIX C. ELEMENTS OF PROBABILITY, STATISTICS AND LEAST SQUARES ADJUSTMENT....295

C.1. Measurement errors, statistical evaluation, propagation of errors....295
C.1.1. Classification of measurements....295
C.1.2. Types of measurement errors....296
C.1.3. Statistical evaluation of direct measurements....297
C.1.4. Law of propagation of errors....300
C.1.5. Discrete random variables....301
C.1.6. Coninuous random variables....304
C.1.7. A few used distributions....306
C.2. Measurements adjustment by the least squares method....312
C.2.1. Basic principles....312
C.2.2. Adjustment of indirect observations....314
C.2.3. Adjustment by condition equations....320
C.2.4 Adjustment of indirect observations with constraints....325
C.2.5. Adjustment by condition equations with unknown parameters (general case)....329
C.2.6. Methods for solution improvement after adjustment....332
C.2.7. Evaluation of adjustment accuracy by error ellipse and ellipsoid....334

REFERENCES....338

SUBJECT INDEX....341

Scanned with OKEN Scanner

Lucian L. Turdeanu, FOTOGRAMMETRIE ANALITICĂ (Photogrammétrie analytique), Bucureşti, Editura Academiei Române, 1997, 356 p.

RÉSUMÉ

Ce livre étudie les principaux problèmes de la photogrammétrie analytique, en supposant que les lecteurs soient familiarisés avec les notions fondamentales de la photogrammétrie. Pour relever l'aspect photogrammétrique, les développements mathématiques se trouvant à la base des démonstrations théoriques sont présentés dans trois chapitres-annexes. Ceux-ci se réfèrent aux principes géométriques utilisés dans la photogrammétrie analytique, à l'algébre matricielle qui est la base des développements théoriques et pratiques et à la méthode des moindres carrés qui permet le traitement des données. En outre, y sont définis les symboles utilisés à partir des ouvrages de référence au niveau mondial.

Il faut souligner que les développements théoriques sont complétés de recommandations relatives à la résolution de divers problèmes, ce qui imprime également à l'ouvrage un caractère pratique accentué. D'ailleurs, l'auteur a une vaste expérience dans l'enseignement universitaire et la recherche dans le domaine étudié. L'aérotriangulation analytique, le plus ample et complexe chapitre du livre est le plus suggestif de ce point de vue et reflète la contribution de l'auteur concernant la structure et le contenu des problèmes présentés. Il étudie les principales méthodes d'aérotriangulation tout en donnant des indications sur les modalités de leur application pratique. Tous les chapitres antérieurs convergent vers ce chapitre, bien qu'on puisse considérer qu'ils résolvent des problèmes indépendants ou partiellement liés. Enfin, le dernier chapitre se réfère aux appareils utilisés pour l'exploitation analytique des clichés, en établissant une claire classification de ceux-ci.

Compte tenu de tous ces aspects, on peut remarquer que l'ouvrage s'adresse surtout aux chercheurs et spécialistes qui travaillent dans le domaine de la photogrammétrie-télédétection; il s'adresse aussi à tous ceux qui, possédant les notions fondamentales de photogrammétrie et de mathématiques, se proposent d'étudier sérieusement cette discipline. En plus, en raison de l'élargissement continu de la sphère d'application de la photogrammétrie-télédétection aux domaines topographiques et non topographiques, le livre peut être également utile pour beaucoup d'autres spécialistes.

Scanned with OKEN Scanner

SOMMAIRE

1.INTRODUCTION.....13

1.1. Généralités.....13
1.1.1. Définitions.....13
1.1.2. Bref historique.....13
1.2. Principes fondamentaux.....13
1.2.1. Principes généraux.....15
1.2.2. Le problème général et les problèmes fondamentaux de la photogrammétrie analytique.....15
1.2.3. Orientation des clichés.....16
1.3. Définition des symboles utilisés.....19
.....22

2. ORIENTATION INTERNE.....26

2.1. Système de coordonnées-cliché.....26
2.2. Réduction des coordonnées-cliché au point principal.....26
2.3. Correction des erreurs instrumentales.....28
2.4. Correction de la déformation du support d'émulsion.....30
2.5. Correction de la distorsion de l'objectif de prise de vue.....34
2.6. Correction de l'influence de la réfraction atmosphérique.....39
2.7. Correction de l'influence de la courbure de la Terre.....42
2.8. Correction des influences dues aux dénivelées.....43
.....45

3. ORIENTATION EXTERNE D'UN SEUL CLICHÉ.....47

3.1. Condition de colinéarité.....47
3.2. Formes particulières des équations de colinéarité.....47
3.3. Forme différentielle des équtions de colinéarité.....51
3.4. Exploitation métrique d'un seul cliché.....53
.....58

4. ORIENTATION EXTERNE D'UN COUPLE DE CLICHÉS.....69

4.1. Orientation relative.....69
4.1.1. Condition de coplanarité.....69
4.1.2. Forme linéaire de l'équation de coplanarité.....71
.....73

Scanned with OKEN Scanner

4.1.3. Orientation du faisceau d'une station par rapport au faisceau de l'autre.....75
4.1.4. Orientation relative au moyen des rotations.....83
4.2. Obtention du modèle stéréoscopique numérique.....87
4.2.1. Calcul des coordonnées d'un modèle stéréoscopique.....87
4.2.2. Calcul des coordonnées d'un modèle double.....91
4.2.3.Déformations du modèle stéréoscopique.....93
4.3. Orientation absolue.....97
4.3.1. Relations mathématiques fondamentales.....97
4.3.2. Obtention des valeurs approximatives des éléments d'orientation.....102
4.3.3. Ajustement de l'orientation absolue.....105
4.3.4. Détermination des coordonnées-terrain des détails.....108

5. ORIENTATION EXTERNE DES CLICHÉS TERRESTRES.....111

5.1. Généralités.....111
5.2. Relations fondamentales.....113
5.3. Précision d'obtention des coordonnées-terrain.....118
5.4. Traitement rigoureux.....120

6. AÉROTRIANGULATION ANALYTIQUE.....126

6.1. Introduction. Definitions. Classements.....126
6.2. Aérotriangulation en bande.....128
6.2.1. Connexion des modèles stéréoscopiques analytiques orientés successivement..129
6.2.2. Connexion des modèles stéréoscopiques analytiques indépendants.....133
6.2.3. Connexion des modèles stéréoscopiques analogiques indépendants.....136
6.2.4. Ajustement des bandes de clichés.....138
6.3. Ajustement d'aérotriangulation en bloc.....142
6.3.1. Ajustement d'un bloc de bandes.....142
6.3.2. Ajustement en bloc des modèles stéréoscopiques indépendants.....145
6.3.3. Ajustement en bloc par faisceaux photogrammétriques.....161
6.4. Cas spéciaux d'aérotriangulation.....178
6.4.1. Ajustement simultané des observations photogrammétriques et géodésiques....178
6.4.2. Utilisation du GPS en aérotriangulation.....187
6.4.3. Ajustement de l'aérotriangulation en cas de terrains plans.....194
6.4.4. Aérotriangulation par la méthode du survol.....198
6.5. Précision de l'aérotriangulation.....201

7. APPAREILS UTILISÉS POUR L'EXPLOITATION ANALYTIQUE DES CLICHÉS.....206

7.1. Dispositifs pour le marquage et le eport de points.....207
7.2. Appareils de mesure photogrammétrique.....209
7.2.1. Monocomparateurs.....209
7.2.2. Stéréocomparateurs.....211
7.2.3. Mesure de coordonnées à l'aide des appareils analogiques.....216
7.3. Système intéractif d'exploi ation analytique.....219
7.4. Stéréorestituteurs analytiques.....220

Scanned with OKEN Scanner

ANNEXE A. ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET PROJECTIVE....226

A.1. Systèmes de coordonnées....226
A.2. Transformations de coordonnées....227
A.2.1. Transformations sur le plan....227
A.2.2. Transformations dans l'espace....232
A.3. Propriétés, relations et théorèmes fondamentaux de la géométrie projective, utilisés dans la photogrammétrie....247
A.3.1. Correspondance projective entre les éléments de variétés à une dimension...248
A.3.2. Correspondance projective entre les éléments de variétés à deux dimensions257
A.3.3. Correspondance projective entre les éléments de variétés à trois dimensions.260
A.3.4. Transformation par inversion....261

ANNEXE B. ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE ET D'ANALYSE MATRICIELLE....264

B.1. Matrices....264
B.1.1. Définitions, cas spéciaux et propriétés générales....264
B.1.2. Opérations sur les matrices....266
B.1.3. Matrice inverse....269
B.1.4. Rang d'une matrice. Transformations élémentaires....271
B.1.5. Différenciation des matrices....27
B.2. Déterminants....273
B.2.1. Définitions....273
B.2.2. Calcul des déterminants....274
B.2.3. Propriétés des déterminants....275
B.2.4. Différenciation des déterminants....275
B.3. Systèmes d'équations linéaires....277
B.3.1. Généralités....277
B.3.2. Systèmes mal-conditionnés....279
B.3.3. Résolution des systèmes d'équations linéaires....280

ANNEXE C. ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES PROBABILITÉS, DE STATISTIQUE ET DE MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS....295

C.1. Erreurs de mesure, indicateurs statistiques, propagation des erreurs....295
C.1.1. Classification des mesures....295
C.1.2. Types d'erreurs de mesure....296
C.1.3. Évaluation statistique des mesures directes....297
C.1.4. La loi de propagation des erreurs....300
C.1.5. Variables aléatoires discrètes....301
C.1.6. Variables aléatoires continues....304
C.1.7. Distributions utilisées dans l'étude des erreurs....306
C.2. Ajustement des mesures par la méthode des moindres carrés....312
C.2.1. Principes fondamentaux....312
C.2.2. Ajustement des mesures indirectes....314

Scanned with OKEN Scanner

C.2.3. Ajustement par équations de condition.....320
C.2.4. Ajustement des mesures indirectes avec contraintes.....325
C.2.5. Ajustement par équations de condition avec des inconnues.....329
C.2.6. Modalités d'amélioration de la solution après l'ajustement.....332
C.2.7. Évaluation de la précision des résultats de l'ajustement à l'aide de l'ellipse et de l'ellipsoïde des erreurs:.....334

BIBLIOGRAPHIE.....338

INDEX.....341

Scanned with OKEN Scanner

AVANGARDA GIS CU TEMATICĂ DE CADASTRU ÎN ROMÂNIA

* INSTITUTUL DE GEODEZIE, FOTOGRAMMETRIE, CARTOGRAFIE ŞI ORGANIZAREA TERITORIULUI

AVANGARDA GIS CU TEMATICĂ DE CADASTRU ÎN ROMÂNIA

* INSTITUTUL DE GEODEZIE, FOTOGRAMMETRIE, CARTOGRAFIE ŞI ORGANIZAREA TERITORIULUI

Coperta de: Gigi Gavrilă
Materialul ilustrativ executat de: Ana Ignat

Redactor: Eugen Marineanu
Tehnoredactor: Magda Jindiceanu
Format: 16/70 × 100. C.T. : 22,5
C.Z. pentru biblioteci mari: 526 918
C.Z. pentru biblioteci mici: 52
Bun de tipar: 13.05.1997

Scanned with OKEN Scanner

ISBN 973-27-0613-9

Scanned with OKEN Scanner